

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR**



Grado en Ingeniería Informática

TRABAJO FIN DE GRADO

Difusión competitiva de noticias en redes sociales

Análisis e implementación de modelos

Autor: Ricardo Riol González

Tutor: Simone Santini

julio 2020

Todos los derechos reservados.

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con la autorización de los titulares de la propiedad intelectual.

La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (*arts. 270 y sgts. del Código Penal*).

DERECHOS RESERVADOS

© 8 de julio de 2020 por UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

Francisco Tomás y Valiente, n.º 1

Madrid, 28049

Spain

Ricardo Riol González

Difusión competitiva de noticias en redes sociales

Ricardo Riol González

C\ Francisco Tomás y Valiente N.º 11

IMPRESO EN ESPAÑA – PRINTED IN SPAIN

"Me doy cuenta de que todo el mundo dice que las redes sociales son un unicornio, ¿pero y si sólo es un caballo?"

Jay Baer, social-media strategist

RESUMEN

La rápida difusión de información que Internet y las redes sociales nos ofrecen, ha catapultado la aparición de las conocidas fake news. Debido a su acelerado crecimiento, el análisis de cómo estas noticias falsas se propagan en poblaciones ha adquirido un gran interés de estudio en estos últimos años.

En estos estudios, es muy común identificar las noticias falsas como virus y aplicar modelos de propagación de enfermedades infecciosas (SI, SIS, SIR, etc.) para explicar cómo se difunde la información. El objetivo de este trabajo es analizar experimentalmente algunas extensiones del modelo SIS que se han propuesto en la literatura para estudiar la propagación competitiva de noticias, y proponer una nueva que se aleja en cierta medida del modelo viral y que es específica para la difusión de información. La simulación de estos modelos en redes sociales se ha llevado a cabo en grafos multicapa generados aleatoriamente mediante el modelo de Leskovec *et al.* [1], donde cada capa representa un mecanismo distinto de transmisión de la información.

El primer modelo que se expone, el modelo SI_1SI_2S [2], es esencialmente una extensión del modelo SIS a dos virus que se extienden cada uno en una capa de un grafo multicapa. El principal resultado de este modelo, es la demostración rigurosa de la existencia de una región para la cual ambas noticias coexisten cuando se propagan por capas distintas, mientras que esta coexistencia es inviable en el caso de que se propaguen por la misma capa.

Sin embargo, en el contexto de la difusión de información, se pueden incluir hipótesis al modelo SI_1SI_2S que lo hacen mucho más realista. Por ejemplo la posibilidad de cambiar de opinión. En base a esta nueva suposición se construyen los modelos $SI_1SI_2(I_1)S$ y $SI_1(S)I_2S$. La diferencia es que el primero solo permite que el cambio de opinión se realice en único sentido, mientras que el segundo lo permite en ambos.

En este trabajo se prueba que estos dos modelos sí que permiten que dos noticias que compiten coexistan en grafos de una sola capa. Además, ambos modelos siguen manteniendo esa región de coexistencia que aparece en SI_1SI_2S en grafos de dos capas con la salvedad que el modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ da regiones más estrechas, mientras que $SI_1(S)I_2S$ describe regiones más amplias.

PALABRAS CLAVE

Análisis e implementación de modelos | difusión competitiva | fake news | grafos multicapa | ecuaciones diferenciales

ABSTRACT

The rapid spread of information that the Internet and social networks provide us, has catapulted the appearance of the well-known fake news. Due to this accelerated growth, the analysis of how these false news are spread in populations has acquired a great interest of study in recent years.

In these studies, it is very common to identify fake news as viruses and apply infectious disease propagation models (SI, SIS, SIR, etc.) to explain how the information is disseminated. The aim of this work is to experimentally analyze some extensions of the SIS model that have been proposed in the literature to study the competitive propagation of news, and to propose a new one that moves away to some extent from the viral model and that is specific to the diffusion of information. The formal implementation of these social networks has been carried out through the Leskovec [1] algorithm and multilayer networks, where each layer represents a different transmission route.

The first model exposed, the SI_1SI_2S model, is essentially an extension of the SIS model to two viruses each spreading on a layer of a multilayer network. The main result of this model is the rigorous proof of the existence of a region for which both news coexist when they spread in different layers, while this coexistence is unfeasible in the case of propagation in the same layer.

However, in the context of information diffusion, hypotheses can be included in the SI_1SI_2 model that make it much more realistic. For example, the possibility of changing one's mind. Based on this new assumption, the $SI_1SI_2(I_1)S$ and $SI_1(S)I_2S$ models are constructed. The difference is that the first only allows the change of opinion to be made in one direction, while the second allows it in both.

In this paper we prove that these two models do allow two competing news to coexist in single-layer graphs. In addition, both models continue to maintain that coexistence that appears in SI_1SI_2S in two-layer networks with the exception that the model $SI_1SI_2(I_1)S$ gives narrower regions, while $SI_1(S)I_2S$ describes broader regions.

KEYWORDS

Model analysis and implementation | competitive propagation | fake news | multi-layer networks | differential equations

ÍNDICE

1	Introducción	1
1.1	Motivación del trabajo	1
1.2	Objetivos	2
2	Estado del arte	3
2.1	Introducción	3
2.2	Modelos clásicos de difusión	3
2.3	Redes sociales modeladas con grafos	4
2.3.1	Modelo de Leskovek	5
2.3.2	Grafos multicapa	5
2.4	Modelo SI_1SI_2S	6
2.4.1	Descripción del modelo	6
2.4.2	Caso de grafos de una capa	10
3	Trabajo desarrollado	11
3.1	Generación de grafos multicapa. Modelo de Leskovec	11
3.2	Difusión Competitiva: modelo SI_1SI_2S	13
3.2.1	Diseño y desarrollo	13
3.2.2	Pruebas y resultados	15
3.3	Difusión competitiva: modelo $SI_1SI_2(I_1)S$	18
3.3.1	Diseño y desarrollo	18
3.3.2	Pruebas y resultados	20
3.3.3	Otra perspectiva	25
3.4	Difusión competitiva: modelo $SI_1(S)I_2S$	29
3.4.1	Diseño y desarrollo	29
3.4.2	Pruebas y resultados	29
4	Conclusiones	35
	Bibliografía	37
	Apéndices	39
A	Apéndice A	41
A.1	Teorema de Perron-Frobenius	41
A.2	Condición de no propagación	41

A.3	Cálculo de derivada	42
A.4	Inestabilidad de las soluciones I, II y III	42
A.5	Umbral de supervivencia en grafos de una capa	43
B	Apéndice B	45
B.1	Generación de un grafo multicapa. Modelo de Leskovek	45
B.1.1	Creación de un nodo	45
B.1.2	Creación de un enlace	46
B.2	Pruebas del modelo $SI_1(S)I_2S$ para grafos de una capa	47

LISTAS

Lista de algoritmos

3.1	Algoritmo de difusión del modelo SI_1SI_2S	14
-----	----------------------------------------------------	----

Lista de códigos

3.1	Modelo Leskovec: estructura de una tarea	11
3.2	Modelo Leskovec: método inicial del algoritmo	12
B.1	Modelo Leskovec: creación del nodo y de su primer enlace por adhesión preferencial .	45
B.2	Modelo Leskovec: programación del siguiente enlace en la fase de creación de un nodo	45
B.3	Modelo Leskovec: programación de la tarea para crear el siguiente nodo.	46
B.4	Modelo Leskovec: creación de un nuevo enlace en cada capa del grafo	46
B.5	Modelo Leskovec: programación del siguiente enlace en la fase de creación de enlaces	47

Lista de ecuaciones

2.1	Ecuaciones del modelo SI	4
2.2	Ecuaciones del modelo SIR	4
2.3	Ecuaciones del modelo SIS	4
2.4	Ecuaciones del modelo SI_1SI_2S (I)	7
2.5	Ecuaciones del modelo SI_1SI_2S (II)	7
2.6	Ecuación del modelo SI_1SI_2S en el equilibrio	7
2.12	Ecuación del umbral de supervivencia del modelo SI_1SI_2S	9
3.1	Ecuación del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ en equilibrio	19
3.2	Ecuación del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ en equilibrio	19
3.5	Modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ con probabilidad de cambio de opinión constante	26
3.6	Modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ con probabilidad de cambio de opinión constante en equilibrio ..	26
3.7	Ecuación del modelo $SI_1(S)I_2S$ en equilibrio	29

Lista de figuras

2.1	Resumen del modelo SI_1SI_2S	7
3.1	Grafo de una capa generado con el modelo Leskovec	12
3.2	Grafo de una capa generado con el modelo Leskovec	13
3.3	Simulación del modelo SI_1SI_2S en un grafo de una capa	15
3.4	Simulación del modelo SI_1SI_2S en un grafo de dos capas con $\tau_2 = 0,778$	16
3.5	Simulaciones del modelo SI_1SI_2S para distintos valores de τ_2	17
3.6	Regiones del plano según SI_1SI_2S	17
3.7	Resumen del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$	18
3.8	Simulación modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ en un grafo de una capa (τ_1 fijo)	20
3.9	Simulación modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ para $\tau_1 = 0,3$	21
3.10	Simulaciones modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ ($\alpha = 0,5$)	21
3.11	Simulaciones modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ para distintos valores de α	22
3.12	Gráfica de umbrales del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ para distintos valores de α	23
3.13	Simulación del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ en un grafo de dos capas para distintos α	24
3.14	Comportamiento del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ para distintos valores de α	25
3.15	Resumen del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ desde otra perspectiva.	26
3.16	Simulaciones de la nueva perspectiva del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$	27
3.17	Simulación en un grafo de dos capas de nueva versión del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$	28
3.18	Modelo $SI_1(S)I_2S$	29
3.19	Simulaciones del modelo $SI_1(S)I_2S$ para distintos valores de τ_2	30
3.20	Resumen resultados modelo $SI_1(S)I_2S$	31
3.21	Simulación del modelo $SI_1(S)I_2S$ en grafos de dos capas	31
3.22	Plano (τ_1, τ_2) para distintos valores de α en grafos de dos capas	32
3.23	Gráfico límite del modelo $SI_1(S)I_2S$	33
B.1	Simulaciones de la nueva perspectiva del modelo $SI_1(S)I_2SS$	47

INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación del trabajo

En un mundo en el que todos estamos conectados, internet y las redes sociales juegan un papel fundamental a la hora de facilitar y acelerar la difusión de la información. Hoy en día, nos podemos enterar de cualquier acontecimiento en cuestión de minutos, algo que parecía imposible hace algunos años. Sin embargo, esta rapidez de transmisión también ha desembocado en un terreno fértil para la desinformación con la rápida propagación de noticias falsas, rumores y bulos.

Un estudio reciente determinó que las fake news están cuidadosamente construidas para ser mucho más atractivas para el lector que las noticias verdaderas [3]. Si a esto le añadimos el hecho de que tan solo unos pocos usuarios verifican la veracidad de las noticias antes de compartirlas, por lo que el resto de usuarios se convierten en posibles fuentes de difusión, podemos explicar su rápida difusión en las redes sociales. Como ejemplo concreto, durante las elecciones estadounidenses del 2016, las redes se plagaron de noticias falsas. Facebook reconoció que un alto porcentaje de la población de Estados Unidos estuvo expuesto a publicaciones falsas de una compañía llamada Internet Research Agency. Por otra parte, Twitter identificó miles de cuentas falsas dedicadas a esta actividad.

En los últimos años, el interés por la propagación de las noticias falsas en las redes sociales y la implementación de métodos para su detección ha crecido notablemente. En el proceso de difusión de la información, es común utilizar modelos matemáticos estocásticos de propagación de enfermedades infecciosas debido a la gran similitud que existe entre la expansión de una noticia con la de un virus en poblaciones con libertad de movimiento. En este contexto, los modelos SI , SIR y SIS son los modelos más utilizados para realizar este tipo de estudios.

Sin embargo, hoy en día la realidad es muy distinta, ya que prácticamente el total de las fake news que se viralizan, lo hacen a través de las redes sociales. De hecho, cada día multitud de bulos compiten entre ellos y con las noticias verdaderas por infectar a la mayor cantidad de usuarios posibles, y no solo eso, si no que al haber tantas redes sociales que comparten usuarios, esta expansión competitiva también existe entre noticias que se propagan en redes sociales distintas. Es decir, la difusión de una noticia A puede verse influenciada por la propagación de otra noticia B en otra red social distinta. Por tanto, analizar esta competitividad por llegar a la mayor cantidad de usuarios en la misma o diferente

red social y ver cómo afecta a su propagación es de gran interés.

En este trabajo se estudiarán experimentalmente algunos modelos recientes de difusión competitiva de noticias contrastantes aparecidos en la literatura y basados, esencialmente, en una extensión del modelo *SIS*. También propondremos dos modelos nuevos que, respecto a los existentes, añade la posibilidad de que una persona pueda cambiar de opinión. Se trata de una posibilidad que no tiene correspondencia en el ámbito viral, por tanto estos se pueden considerar como unos de los primeros modelos específicos para el estudio de la difusión de informaciones contrastantes.

1.2. Objetivos

De acuerdo con las motivaciones del proyecto, el presente documento tiene como objetivo principal analizar la propagación competitiva de dos noticias en redes sociales. Es fundamental entender cómo las características topológicas de la red, el comportamiento de los usuarios y las características de las propias noticias interfieren en esta difusión. El problema se resume en estudiar cuándo tienen lugar cada una de las posibles interacciones de dos noticias en competencia. Abordaremos el problema desde dos enfoques diferentes. En el primero nos centraremos en dos noticias que se difunden por la misma red social, mientras que en el segundo, cada noticia se expande por una red social distinta donde los usuarios son comunes.

Para la consecución de este objetivo general, nos planteamos los siguientes objetivos parciales:

- O-1.**— A diferencia de los modelos clásicos de propagación de enfermedades víricas, los modelos con los que analizaremos la expansión competitiva de las dos noticias necesitan implementarse sobre una estructura que se asemeje a la configuración topológica de una red social.
 - O-1.1.**— Implementación de una librería de *grafos multicapa* que nos permita hacer simulaciones tanto para noticias que se propagan en competencia en la misma red social o en dos redes sociales distintas. Cada capa del grafo representa cada una de las redes sociales por las que se expanden las noticias.
 - O-1.2.**— Implementación del *algoritmo de Leskovec* [1] que permite la generación aleatoria de grafos multicapa con características semejantes a las redes sociales. (véase 2.3.1 y 3.1).
- O-2.**— Estudiar la propagación competitiva de dos noticias en grafos multicapa aplicando los modelos de difusión que se adjuntan a continuación. Aunque estos tres modelos son una adaptación del modelo *SIS* a nuestro problema, cada uno de ellos tiene particularidades que lo hacen muy distintos de los otros. Nuestro objetivo es tratar de estudiar las interacciones de ambas noticias para estos tres modelos, centrándonos en si pueden llegar a coexistir en el grafo. En caso de que se aparezca dicha región de coexistencia, también debemos ser capaces de compararlas.
 - O-2.1.**— Modelo SI_1SI_2S (véase 2.4.1 y 3.2).
 - O-2.2.**— Modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ (véase 3.3).
 - O-2.3.**— Modelo $SI_1(S)I_2S$ (véase 3.4).

ESTADO DEL ARTE

2.1. Introducción

Los modelos de difusión de la información se basan generalmente en modelos de propagación de enfermedades víricas. Por este motivo, en la sección 2.2 de este capítulo, se da una visión panorámica de los principales modelos de difusión de virus que se están aplicando actualmente al mundo de la propagación de la información. Estos modelos tratan a los individuos de la población como partículas libres en un espacio acotado, lo cual se aleja de nuestro objetivo, ya que no tienen en cuenta cómo la estructura de una red social afecta a la difusión de la información.

Para modelar redes sociales es muy común la utilización de la teoría de grafos. Existen multitud de modelos que a partir de grafos intentan imitar la estructura topológica de una red social. Dos de los más utilizados son el grafo *preferential attachment* de Barabási–Albert [4] o el de Leskovec *et al.* [1]. Si lo que se quiere es modelar cómo la información se propaga a través de las redes sociales, es necesario adaptar los modelos clásicos para que utilicen grafos como estructura subyacente para la difusión de la información. El modelo clásico que utilizaremos como base es el modelo SIS, y a su adecuación al uso de grafos lo denominaremos SI_1SI_2S . Este modelo se analizará en detalle en la sección 2.4.1.

Sin embargo, en el contexto de la propagación de información en redes sociales, se pueden suponer ciertas hipótesis que no tienen sentido en el mundo de las enfermedades víricas. Por ejemplo, la posibilidad de cambiar de opinión. En el capítulo siguiente se proponen varios modelos que incorporan esta suposición desde diferentes puntos de vista.

2.2. Modelos clásicos de difusión

En la actualidad existen muchos modelos de transmisión de enfermedades infecciosas aplicables a la difusión de noticias en poblaciones, ya que en realidad la estructura matemática de ambos problemas es la misma. Una noticia, que hace el papel de virus, se difunde a través de los individuos de una población que se mueven libremente en un espacio. Entre los modelos que cumplen con las hipótesis

descritas, podemos destacar los modelos SI , SIR y SIS .

El modelo SI , es un modelo aplicable a enfermedades víricas crónicas que divide a la población en dos clases disjuntas: susceptibles ($S(t)$) e infectados ($I(t)$). Las ecuaciones quedan así:

$$\begin{cases} S'(t) = -I'(t) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

donde β es la tasa de infección del virus. Si los individuos se mueven libremente y se encuentran al azar, $S(t)I(t)$ es proporcional a la probabilidad de que un infectado se encuentre con un susceptible (la constante de normalización está integrada en β).

Kermack y McKendrick [5] extendieron este modelo a enfermedades (por ejemplo, el sarampión) en que una persona, una vez que se ha recuperado de la enfermedad, desarrolla inmunidad, y ya no se vuelve a infectar. Se trata del modelo SIR . Este divide a una población de tamaño constante N en tres conjuntos disjuntos: susceptibles ($S(t)$), infectados ($I(t)$) y recuperados ($R(t)$). Este nuevo grupo, representa los individuos que ya se han curado después de ser infectados, por lo que no pueden volver a contraer la enfermedad. Este modelo propone que los individuos se recuperen a una tasa constante δ . Las ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \delta I(t) \\ R'(t) = \delta I(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

Por último, el modelo SIS se aplica a enfermedades víricas que no dan inmunidad permanente como la gripe, ya que los infectados que se recuperan vuelven al estado de susceptible. Por tanto, el modelo solo permite dos estados: susceptibles ($S(t)$) e infectados ($I(t)$).

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) + \delta I(t) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \delta I(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

Cuando se aplican este tipo de modelos a la difusión de información, por ejemplo de noticias falsas, la idea de incluir usuarios recuperados parece intuitiva. Sin embargo, la recuperación, en este caso, no es absoluta, ya que no es algo biológico como ocurre con los virus y el sistema inmunitario. Si ya te has creído una noticia falsa, por qué no te la ibas a creer otra vez. Ambas perspectivas son correctas y puede ser interesante ver como varían los resultados en función del modelo que se esté utilizando.

2.3. Redes sociales modeladas con grafos

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, es muy común modelar las redes sociales con grafos, ya que los nodos representan a los usuarios de la red, mientras que los enlaces indican las

conexiones directas entre ellos.

Este tipo de modelos intenta imitar la estructura topológica de una red social aplicando una serie de métricas (diámetro, clustering, distribución en grado k , etc.) para obtener un grafo con propiedades muy concretas. De este tipo de modelos destacan: el modelo de *Barabási-Albert* [4] y el *modelo de Leskovec* [1].

El modelo de Barabási-Albert sigue un proceso iterativo en el que los nuevos vértices que se unen al grafo establecen conexiones con los nodos ya existentes, de tal forma que los nodos con más vecinos tendrán más posibilidades de conectarse con los nuevos nodos. Esto es lo que se conoce como **conexión preferencial**.

2.3.1. Modelo de Leskovec

El modelo de Leskovec [1] es el que vamos a utilizar en este trabajo para la generación de grafos aleatorios que simulen las características de las redes sociales. A continuación se describe a grandes rasgos los detalles del modelo.

El grafo se genera incrementalmente, evolucionando con el tiempo mediante un proceso que imita la forma en que la gente se une a las redes sociales. La idea general es que los nodos se crean, es decir, se unen a la red en determinados instantes de tiempo t_i . Si el grafo en el que el nodo i es creado es $G = (V, E)$, entonces $t_i = \sqrt{(|V| + 1)/k}$, donde k es un parámetro de entrada al modelo. En este instante, se le proporciona al nodo una vida útil a partir de una distribución exponencial de media $\frac{1}{\lambda}$. Es decir, si el nodo i ha sido creado en el tiempo t_i y posee un tiempo de vida de a , este permanecerá activo hasta el tiempo $t + a$. Además, en el momento de la creación este nodo establece un enlace con algún nodo ya existente del grafo mediante conexión preferencial. Durante el tiempo que el nodo esté activo, tendrá la capacidad de crear enlaces con otros nodos. Se utilizan dos estrategias diferentes en la creación de enlaces:

- 1.– **Cierre de triángulos**: consiste en que un nodo cree enlaces con los vecinos de sus vecinos, tratando de imitar en mayor medida lo que ocurre en las redes sociales reales. Esta estrategia ocurre con probabilidad p , que es un parámetro de entrada al modelo.
- 2.– **Conexión preferencial**: ocurre con probabilidad $1 - p$.

En $t + a$ el nodo se vuelve inactivo y pierde la capacidad de crear enlaces. Esto no significa que cualquier otro nodo activo pueda crear un enlace con este. El algoritmo termina cuando el grafo tiene N nodos creados (parámetro de entrada) y todos estén inactivos.

2.3.2. Grafos multicapa

Un grafo multicapa es un grafo en el que existen varios tipos de enlace. Cada tipo de enlace representa las conexiones entre los nodos de una determinada capa. De esta forma, se consigue una estructura de grafos superpuestos donde los nodos son comunes. Este tipo de grafos son muy útiles para estudiar la difusión de información por diferentes canales o distintas redes sociales. La generación aleatoria del grafo se realiza de un modo análogo al propuesto Leskovec pero adaptado a múltiples capas. Fijando el número de capas en dos, podemos definir la siguiente notación que se utilizará en el

resto del trabajo.

- Representaremos un grafo de dos capas por $G(V, E_A, E_B)$, donde V es el conjunto de nodos, E_A son los enlaces de la capa A y E_B los de la capa B .
- Denotaremos por $A [N \times N]$ a la matriz de adyacencia de la capa A .

$$A = \begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{si el nodo } j \text{ está conectado con } i \\ a_{ij} = 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De igual modo se define una matriz $B [N \times N]$ para la capa B del grafo. Como el grafo es no dirigido, ambas matrices son simétricas, y por tanto $a_{ij} = a_{ji}$ y $b_{ij} = b_{ji}$.

- Escribiremos $\lambda_1(A)$ para referirnos al mayor autovalor de la matriz A . Simétricamente, $\lambda_1(B)$ denota al mayor autovalor de la matriz B . Como A y B son simétricas todos sus autovalores son números reales. Además, por el teorema de Perron-Frobenius (véase A.1), sabemos que existe un autovalor positivo que es mayor que el valor absoluto del resto. Por tanto, $\lambda_1(A)$ y $\lambda_1(B)$ coinciden con los radios espectrales de sus respectivas matrices.
- Supongamos que $v = (v_1, \dots, v_n)$ es un vector. Entonces $\text{diag}(v)$ es la matriz $[n \times n]$ cuya diagonal está formada por v_i y el resto son 0. Si $r \in \mathbb{R}$, entonces $\text{diag}(r) = \text{diag}(r \cdot \mathbf{1}_n)$.

2.4. Modelo SI_1SI_2S

Una vez puestos en contexto, centrémonos en el objetivo, estudiar la difusión competitiva de dos noticias en redes sociales. Para ello, utilizaremos el modelo SI_1SI_2S [2], que no es más que una adaptación del modelo SIS que permite el estudio de la propagación competitiva en de dos noticias ($N1$ y $N2$) en grafos multicapa. Recordemos que en el modelo SIS , los individuos se mueven libremente por el espacio, por lo que cualquier nodo puede infectar a otro. Sin embargo, en el modelo SI_1SI_2S , un nodo solo puede llegar a creerse una noticia si ya tiene vecinos que se la hayan creído. De hecho, la probabilidad de “infección” de un nodo es directamente proporcional al número de vecinos “infectados”.

2.4.1. Descripción del modelo

Es un modelo estocástico en el que cada nodo puede estar en tres estados diferentes:

- $Q_{N1,i}$: el nodo i cree que la noticia $N1$ es verdadera.
- $Q_{N2,i}$: el nodo i cree que la noticia $N2$ es verdadera.
- S_i : el nodo i es susceptible a $N1$ y $N2$, y en cualquier momento puede transitar al estado $Q_{N1,i}$ o $Q_{N2,i}$.

Durante el desarrollo del modelo vamos a suponer ciertas estas hipótesis:

- El número de nodos del grafo es fijo (N).
- Cada noticia se propaga por una capa distinta del grafo: la noticia $N1$ se expande por E_A , mientras que $N2$ lo hace por E_B . En caso de que solo exista una única capa, ambas noticias se propagarán en competencia por esta.
- Las noticias son mutuamente exclusivas, por tanto, un individuo no puede creer las dos al mismo tiempo.

La difusión de cada noticia depende de dos parámetros:

- Tasa de infección β : representa la probabilidad con que un nodo comparta la noticia a sus vecinos.
- Tasa de curación δ : expresa el tiempo que tarda un nodo en olvidar una noticia que creía como verdadera y volver al estado de susceptibilidad.

Por tanto, nuestro modelo posee al menos cuatro parámetros de entrada: β_1 , δ_1 , β_2 y δ_2 . Sin embargo, en lugar de trabajar con los valores β_i y δ_i se prefiere trabajar con los ratios $\tau_i \equiv \beta_i/\delta_i$. Este nuevo parámetro representa el número de intentos en los que un nodo trata de difundir la noticia a sus vecinos antes de olvidarla. Por tanto, cuanto más alto τ , más “agresiva” será la noticia. La figura 2.1 ilustra el modelo SI_1SI_2S .

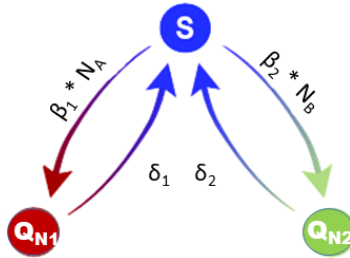


Figura 2.1: Modelo SI_1SI_2S . N_A es el número de vecinos en el estado Q_{N1} . N_B es el número de vecinos en el estado Q_{N2}

Un nodo está en esta en estado S si todavía no tiene una opinión sobre las noticias contrastantes, en estado Q_{N1} si cree la noticia $N1$ y en estado Q_{N2} si cree la noticia $N2$. Obviamente cuanto más vecinos de un nodo se hayan creído una noticia falsa como verdadera, es más probable que el propio nodo acabe creyendo verdadera dicha noticia.

Si $s_i(t)$, $p_{1,i}(t)$ y $p_{2,i}(t)$ son las probabilidades de que el nodo i esté en el estado S , Q_{N1} y Q_{N2} respectivamente en tiempo t , entonces usando la aproximación *mean field*, la evolución de estas probabilidades está dada por [2]:

$$\begin{cases} \dot{p}_{1,i} = \beta_1(1 - p_{1,i} - p_{2,i}) \sum_{j=1}^N a_{i,j} p_{1,j} - \delta_1 p_{1,i} \\ \dot{p}_{2,i} = \beta_2(1 - p_{1,i} - p_{2,i}) \sum_{j=1}^N b_{i,j} p_{2,j} - \delta_2 p_{2,i} \end{cases} \quad (2.4)$$

En términos de τ_1 y τ_2 :

$$\begin{cases} \frac{\dot{p}_{1,i}}{\delta_1} = \tau_1(1 - p_{1,i} - p_{2,i}) \sum_{j=1}^N a_{i,j} p_{1,j} - p_{1,i} \\ \frac{\dot{p}_{2,i}}{\delta_2} = \tau_2(1 - p_{1,i} - p_{2,i}) \sum_{j=1}^N b_{i,j} p_{2,j} - p_{2,i} \end{cases} \quad (2.5)$$

Como podemos observar tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales. El análisis del sistema en el equilibrio ($\dot{p}_{1,i} = 0$ y $\dot{p}_{2,i} = 0$) nos dará las soluciones estacionarias o constantes. La ecuación 2.5 en el punto de equilibrio se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} p_{1,i}^* = \tau_1(1 - p_{1,i}^* - p_{2,i}^*) \sum a_{i,j} p_{1,j}^* \\ p_{2,i}^* = \tau_2(1 - p_{1,i}^* - p_{2,i}^*) \sum b_{i,j} p_{2,j}^* \end{cases} \quad (2.6)$$

donde $p_{1,i}^*$ y $p_{2,i}^*$ son las probabilidades en el punto de equilibrio.

Lema 2.4.1. Sea (G, E_A) un grafo de una capa y N una noticia. La noticia N no se propaga por el grafo si y solo si $\tau_N < \frac{1}{\lambda_1(A)}$. A este valor de τ_N se le conoce como el *umbral de no propagación*.

Demostración. Véase A.2.

Observación. El umbral de propagación solo depende de la topología del grafo, es decir, es independiente de si la noticia se difunde sola o en competencia. Obviamente, si una noticia no es capaz de propagarse por sí misma, tampoco lo hará en competencia.

De acuerdo con el lema 2.4.1, vamos a suponer que ambas noticias cumplen la condición de propagación, es decir, $\tau_1 > \frac{1}{\lambda_1(A)}$ y $\tau_2 > \frac{1}{\lambda_1(B)}$. De esta forma, $N1$ y $N2$ se difunden en competencia por el grafo. El objetivo es conocer para que valores de (τ_1, τ_2) ambas noticias coexisten, desaparecen o una domina sobre la otra. Sin embargo, realizar un análisis del problema en función de estos dos parámetros resulta complicado desde el punto de vista matemático. Para simplificar el problema, estudiaremos el comportamiento de la noticia $N1$ tratando a $N2$ como un factor externo que reduce la susceptibilidad de la población. Formalmente, fijaremos τ_2 ($\tau_2 > \frac{1}{\lambda_1(B)}$) y veremos qué ocurre con $N1$ en función del parámetro τ_1 .

Definición 2.4.1. Sea una noticia $N2$ con $\tau_2 > \frac{1}{\lambda_1(B)}$. Se define el *umbral de supervivencia* de $N1$, denotado como τ_1^c , como el valor crítico de τ_1 para el cual

$$\begin{cases} p_{1,i}^* = 0 \text{ para } \tau_1 \leq \tau_1^c \\ p_{1,i}^* > 0 \text{ para } \tau_1 > \tau_1^c \end{cases} \quad (2.7)$$

Definición 2.4.2. Sea una noticia $N2$ con $\tau_2 > \frac{1}{\lambda_1(B)}$. Se define el *umbral de dominancia* de $N1$, denotado como τ_1^d , como el valor crítico de τ_1 para el cual

$$\begin{cases} p_{2,i}^* > 0 \text{ para } \tau_1 \leq \tau_1^d \\ p_{2,i}^* = 0 \text{ para } \tau_1 > \tau_1^d \end{cases} \quad (2.8)$$

La ecuación 2.6 sugiere cuatro posibles soluciones:

- I. $p_{1,i}^* = p_{2,i}^* = 0 \forall i \in \{1, \dots, N\}$ (Extinción de $N1$ y $N2$)
- II. $p_{1,i}^* = 0$ y $p_{2,i}^* > 0 \forall i \in \{1, \dots, N\}$ (Extinción de $N1$ y dominio de $N2$)
- III. $p_{1,i}^* > 0$ y $p_{2,i}^* = 0 \forall i \in \{1, \dots, N\}$ (dominio de $N1$ y extinción de $N2$)
- IV. $p_{1,i}^* > 0$ y $p_{2,i}^* > 0 \forall i \in \{1, \dots, N\}$ (coexistencia)

Estas cuatro soluciones son lo que se conocen como puntos de equilibrio. Nuestro objetivo es conocer

para que valores de τ_1 y τ_2 son estables estas soluciones, es decir, si nos situamos en un punto cercano a alguna de estas soluciones nos mantendremos cerca con el paso del tiempo.

Caso de grafos de dos capas

Centrémonos ahora en el caso de que el grafo tiene dos capas distintas, es decir, $N1$ se propagará por E_A , mientras que $N2$ lo hará por E_B .

La estabilidad de I ya ha sido analizada con el lema 2.4.1. Es decir, esta solución es estable cuando $\tau_1 < \frac{1}{\lambda_1(A)}$ y $\tau_2 < \frac{1}{\lambda_1(B)}$.

Con el fin de analizar la estabilidad de II, asumiremos que $\tau_1 > \lambda_1(A)$, $\tau_2 > \lambda_1(B)$ y $\dot{p}_{2,1}^* = y_i$ cuando $\dot{p}_{1,i}^* = 0$. Dado τ_2 , esta solución deja de ser estable en el valor de τ_1 para el cual $\dot{p}_{1,i}^* > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, N\}$, es decir, τ_1^c . Exactamente en el *umbral de supervivencia* de $N1$ se tiene que $\dot{p}_{1,i}^*|_{\tau_1=\tau_1^c} = 0$ y $\frac{d\dot{p}_{1,i}^*}{d\tau_1}|_{\tau_1=\tau_1^c} > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, N\}$. Derivando la primera ecuación de 2.6 respecto de τ_1 (ver A.3) se obtiene:

$$\frac{d\dot{p}_{1,i}^*}{d\tau_1}|_{\tau_1=\tau_1^c} = \tau_1^c(1 - y_i) \sum a_{i,j} \frac{d\dot{p}_{1,i}^*}{d\tau_1}|_{\tau_1=\tau_1^c} \quad (2.9)$$

Si definimos $w = (w_1, \dots, w_N) = (\frac{d\dot{p}_{1,1}^*}{d\tau_1}|_{\tau_1=\tau_1^c}, \dots, \frac{d\dot{p}_{1,N}^*}{d\tau_1}|_{\tau_1=\tau_1^c})$ entonces tenemos que

$$w_i = \tau_1^c(1 - y_i)Aw \quad (2.10)$$

Por tanto,

$$w = \tau_1^c[\text{diag}(1 - y_i)A]w \quad (2.11)$$

Por el teorema de Perron Frobenius (A.1), sabemos que $\lambda_1([\text{diag}(1 - y_i)A]) > 0$ es el único autovalor que permite que $w_i > 0$ con $i \in 1, \dots, N$. Por la ecuación 2.11, la única posibilidad para $\lambda_1([\text{diag}(1 - y_i)A])$ tiene que cumplir:

$$\tau_1^c \lambda_1([\text{diag}(1 - y_i)A]) = 1 \implies \tau_1^c = \frac{1}{\lambda_1([\text{diag}(1 - y_i)A])} \quad (2.12)$$

Por tanto, la solución II es estable cuando $\frac{1}{\lambda_1(A)} < \tau_1 \leq \tau_1^c$ dada una noticia $N2$ con τ_2 fijo. La ecuación 2.12 muestra que la susceptibilidad, debido a la competencia con $N2$, se reduce en un factor $(1 - y_i)$ respecto a la propagación sin competencia.

De manera completamente análoga, se prueba que $\tau_2^c = \frac{1}{\lambda_1([\text{diag}(1 - z_i)B])}$ con $z_i = \dot{p}_{2,i}^*$ cuando $\dot{p}_{2,i}^* = 0$. Por tanto, la solución III es estable cuando $\frac{1}{\lambda_1(B)} < \tau_2 \leq \tau_2^c$.

Observación. La absoluta dominancia de $N2$ sobre $N1$ se tiene cuando $\dot{p}_{2,i}^* > 0$ y $\dot{p}_{1,i}^* = 0$ para todo

$i \in \{1, \dots, N\}$, es decir, es la misma condición que se tiene cuando $N1$ no se propaga en competencia con $N2$. Por tanto, podemos concluir que $\tau_2^d = \tau_1^c$. De nuevo, por simetría se tiene también que $\tau_1^d = \tau_2^c$.

Por último, la solución IV es estable cuando $\tau_1^c < \tau_1 \leq \tau_1^d$ y $\tau_2^c < \tau_2 \leq \tau_1^d$, ya que ambas noticias se propagaran por sus respectivas capas en competencia. Por tanto, en el grafo son capaces de coexistir ambas noticias simultáneamente. Además en estas condiciones, se puede demostrar que el resto de soluciones son inestables (véase A.4).

2.4.2. Caso de grafos de una capa

Supongamos ahora que el grafo solo posee una única capa A por la que $N1$ y $N2$ se propagan en competencia, manteniendo el resto de hipótesis igual. La única diferencia con respecto a las ecuaciones 2.5 y 2.6 es que $A = B$.

De nuevo, por el lema 2.4.1 la solución I es estable si y solo si $\tau_1 < \frac{1}{\lambda_1(A)}$ y $\tau_2 < \frac{1}{\lambda_1(A)}$. Como antes, fijado τ_2 , es suficiente calcular τ_1^c para ver qué ocurre en el resto de casos. Si hacemos los cálculos (véase A.5), obtenemos que $\tau_1^c = \tau_2$. Por simetría, $\tau_2^c = \tau_1$. Por tanto, $N2$ domina sobre $N1$ si $\tau_1 < \tau_1^c = \tau_2$ y $N1$ domina sobre $N2$ si $\tau_2 < \tau_2^c = \tau_1$. Esto quiere decir que la coexistencia entre $N1$ y $N2$ es imposible en grafos de una capa, es decir, la noticia que consigue sobrevivir es la absoluta dominadora. En el caso $\tau_1 = \tau_2$ es donde se produce la transición abrupta del dominio de una noticia al dominio de la otra.

Veremos en el próximo capítulo que la situación cambia si se considera la posibilidad que las personas cambien idea, es decir que puedan pasar del estado Q_{N2} al Q_{N1} directamente, sin tener que pasar por el S .

TRABAJO DESARROLLADO

En este capítulo presentaremos el desarrollo teórico y las simulaciones de funcionamiento de varios modelos de propagación competitiva de noticias que extienden el modelo presentado en el capítulo precedente. Para las simulaciones, se han utilizado grafos aleatorios que imitan las características salientes de las redes sociales. Antes de presentar los modelos que analizaremos, dedicaremos algunas palabras al método utilizado para generar estos grafos.

3.1. Generación de grafos multicapa. Modelo de Leskovec

La implementación del modelo de Leskovec [1] para generar grafos multicapa se ha llevado a través de un mecanismo de tareas. Estas se almacenan en una lista ordenada en función del tiempo y se van extrayendo en orden para ser ejecutadas. Una tarea tiene la siguiente estructura:

```

1  class Task:
2      time = 0
3      node = 0
4      act_code = 0
5      f = lambda x:x
6
7      def __init__(self, time, node, act_code, f):
8          self.time = time
9          self.node = node
10         self.act_code = act_code
11         self.f = f

```

El campo `act_node` hace referencia a los dos tipos de tareas que se ejecutarán sobre el nodo indicado en el campo `node`: **creación de un nodo** y **creación de un enlace**. Veamos que operaciones se realizan en cada una de ellas.

- Creación de un nodo. (véase B.1.1)
 - 1.— Se añade al grafo el nuevo nodo con un enlace a otro elegido por conexión preferencial.
 - 2.— Se crea una nueva tarea para la creación de un enlace con otro nodo en tiempo $t + span$. Si en $t + span$ el nodo está inactivo, la tarea no se programará.

3.— Si no se ha superado el número máximo de nodos, se crea una tarea para la creación del próximo nodo en tiempo $t = \sqrt{(N + 1)/k}$, donde N es número de nodos del grafo.

- Creación de un enlace. (véase B.1.2)

1.— Se crea un enlace del nodo sobre el que se ejecuta la tarea a otro nodo del grafo en cada uno de las capas. Con probabilidad p el enlace cierra un triángulo y con probabilidad $(1 - p)$ se hace por conexión preferencial.

2.— Se programa la siguiente creación de un enlace si el nodo sigue activo.

Para que todo este mecanismo se ponga en marcha, hace falta un método que dado un grafo conexo de m nodos introduzca la primera tarea de creación de un nodo en tiempo 0.

```

1 def leskovec(n, m, l, dir, p = 1.0, lbd=0.018, K=2000):
2
3     # the initial graph is composed of inactive nodes and #l of layers
4     G = get_connected_graph(m,l)
5     if G == ERR:
6         return ERR
7
8     # schedule the first creation of a node
9     f = lambda gg, ll, tt : node_create(gg, ll, tt, lbd, K, n, l)
10    tsk = Task(0.0, m, CREATENODE, f)
11    tlist = task_insert([], tsk)

```

El algoritmo para cuando el número máximo de nodos del grafo se haya alcanzado y todos estén en estado inactivo.

A continuación, se muestran dos grafos obtenidos con este algoritmo.

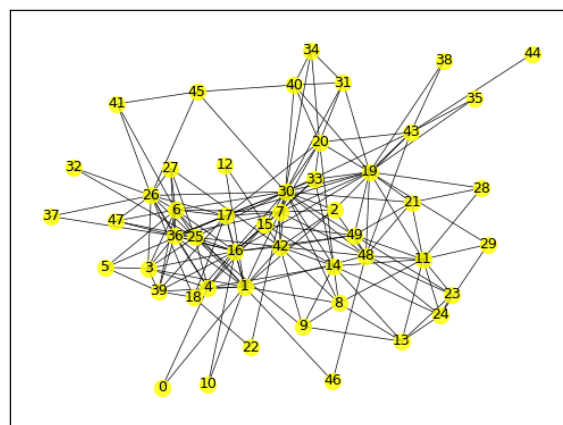
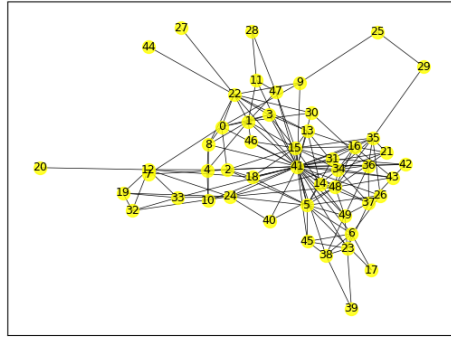
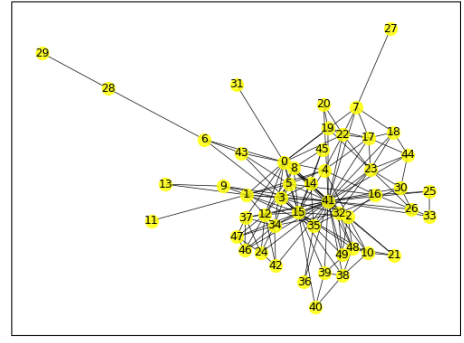


Figura 3.1: leskovec(NG = 50, NGl = 5, NLayers = 1, DIR = FALSE, p = 0.9, lbd = 0.018, k = 0.2)



(a) Capa 1



(b) Capa 2

Figura 3.2: leskovec(NG = 50, NGI = 5, NLayers = 2, DIR = FALSE, p = 0.9, lbd = 0.018, k = 0.2)

3.2. Difusión Competitiva: modelo SI_1SI_2S

En la sección 2.4.1 hemos analizado teóricamente el modelo obteniendo unos resultados que se resumen a continuación.

- Si $\tau_1 < \frac{1}{\lambda_1(A)}$ y $\tau_2 < \frac{1}{\lambda_1(B)}$ ninguna noticia se expande por su capa del grafo.
- Si $\frac{1}{\lambda_1(A)} < \tau_1 < \tau_1^c(\tau_2)$ la noticia $N2$ domina sobre $N1$.
- Si $\tau_1^c(\tau_2) < \tau_1 < \tau_1^d(\tau_2)$ ambas noticias coexisten.
- Si $\tau_1 > \tau_1^d(\tau_2)$ $N1$ domina sobre $N2$.

Recordemos que para la simplificación del problema original se han utilizado herramientas como la linealización o estudiar $N1$ para valores fijos de τ_2 , que pueden haber disminuido la precisión de los resultados. El objetivo de esta sección, es realizar un conjunto de simulaciones que nos ayuden a comprobar que los resultados teóricos no se alejan mucho de los que se obtienen en las pruebas.

3.2.1. Diseño y desarrollo

A continuación, se exponen la decisiones de diseño que se han tomado a la hora de implementar el algoritmo. El objetivo era desarrollar un algoritmo versátil que permitiese simular la mayor cantidad de escenarios posibles y que fuera mínimamente restrictivo.

- 1.— La probabilidad de que un nodo susceptible en tiempo t transite al estado Q_{N1} o Q_{N2} es directamente proporcional al número de vecinos que se encuentren en esos estados. En [6] se razona de la siguiente manera: si suponemos que la probabilidad de que un vecino te convenza para creas el contenido de $N1$ es β_1 , pasando al complementario, $1 - \beta_1$ es probabilidad de que un nodo permanezca en el estado de susceptible cuando $N_A = 1$. De esta forma, $(1 - \beta_1)^{N_A}$ es la probabilidad de un nodo no crea $N1$ cuando tiene N_A vecinos en Q_{N1} . Finalmente, $1 - (1 - \beta_1)^{N_A}$ es la probabilidad de que al menos un vecino te convenza para que cambies de opinión.

El razonamiento para la fórmula del cambio a Q_{N2} es análogo. Intuitivamente, esto significa que si es una red social la mayoría de tus amigos se han creído una noticia falsa, la probabilidad de que tu llegues a creerte es muy alta.

2.— En caso de que un nodo en instante t cumpla las probabilidades de tránsito a los estados Q_{N1} y Q_{N2} , se elegirá una de ellas totalmente al azar.

3.— El tránsito de los nodos a sus nuevos estados se hará al finalizar del instante de tiempo t .

4.— Un grafo tiene diámetro D si para todo par de nodos existe un camino que los une con D enlaces como mucho. Los grafos generados por el modelo de Leskovec tienen diámetros muy pequeños (grafos de 1000 nodos tienen diámetros entre 10 y 20), debido a la gran conectividad que hay entre los nodos. Por tanto, para asegurarnos que las ejecuciones lleguen a un estado de equilibrio, es decir, soluciones estables que no varíen mucho con el tiempo, basta con que el número de instantes de tiempo de ejecución sea igual al número de nodos del grafo.

El pseudocódigo del algoritmo es el siguiente:

```

input : Grafo,  $\beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2$ 
output: Proporción de nodos en cada estado

1   $n_1, n_2 \leftarrow \text{ElegirNodosIniciales}(\text{Grafo})$ ;
2   $n_1.\text{SetEstado}(Q_{N1})$ ;
3   $n_2.\text{SetEstado}(Q_{N2})$ ;
4  while  $t < N$  do
5      for  $\text{nodo} \in \text{Grafo.nodos}$  do
6          #  $N_A$  es el número de vecinos de la capa  $A$  en el estado  $Q_{N1}$ ;
7          #  $N_B$  es el número de vecinos de la capa  $B$  en el estado  $Q_{N2}$ ;
8           $N_A, N_B \leftarrow \text{ClasificarVecinos}(\text{Grafo}, \text{nodo})$ ;
9          if  $\text{nodo}.\text{GetEstado} == Q_{N1}$  then
10             if  $\text{prob} < \delta_1$  then
11                  $S.\text{append}(\text{nodo})$ 
12             end
13         end
14         if  $\text{nodo}.\text{GetEstado} == Q_{N2}$  then
15             if  $\text{prob} < \delta_2$  then
16                  $S.\text{append}(\text{nodo})$ 
17             end
18         end
19         # En caso de que se den ambas probabilidades se escoge al azar;
20         if  $\text{prob} < 1 - (1 - \beta_1)^{N_A}$  then
21              $\text{List}Q_{N1}.\text{append}(\text{nodo})$ 
22         end
23         if  $\text{prob} < 1 - (1 - \beta_2)^{N_B}$  then
24              $\text{List}Q_{N2}.\text{append}(\text{nodo})$ 
25         end
26     end
27     foreach  $\text{nodo} \in \text{List}Q_{N1}$  do  $\text{nodo}.\text{SetEstado}(Q_{N1})$ ;
28     foreach  $\text{nodo} \in \text{List}Q_{N2}$  do  $\text{nodo}.\text{SetEstado}(Q_{N2})$ ;
29     foreach  $\text{nodo} \in S$  do  $\text{nodo}.\text{SetEstado}(S)$ ;
30 end

```

Algoritmo 3.1: Algoritmo de difusión del modelo SI_1SI_2S

3.2.2. Pruebas y resultados

Grafos de una capa

La simulación se ha realizado en un grafo de una sola capa de 100 nodos en el que el autovalor máximo es de 14,66. En la figura 3.3, se muestra una gráfica con las curvas obtenidas en la simulación. Estas curvas son el porcentaje de nodos en los diferentes estados del modelo para una noticia N_2 constante con $\tau_2 = 0,87$ y una noticia τ_1 que varía.

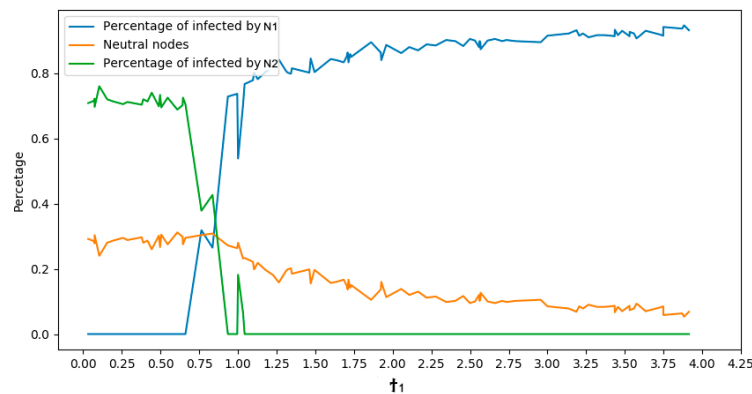


Figura 3.3: Difusión competitiva. Grafo de una capa. $\tau_2 = 0,87$

Como se puede observar para τ_1 entre 0,75 y 0,9 es donde se produce la transición abrupta del dominio de N_2 al dominio de N_1 . El resultado es bastante preciso, ya que $\tau_2 = 0,87$ es donde el modelo teórico predice que se produce tal transición. De hecho el punto de corte exacto entre ambas curvas es 0,875.

Grafos de dos capas

En esta sección se exponen las simulaciones realizadas con el objetivo de contrastar los resultados teóricos obtenidos en la sección 2.4.1. Todas las pruebas se han realizado sobre un mismo grafo de estas características:

- Número de nodos: 75
- Número de capas: 2
- $\lambda_1(A) = 6,82$
- $\lambda_1(B) = 7,79$

El número de nodos no se ha elegido al azar, sino que se ha elegido por la claridad de los resultados. Si hubiésemos elegido un grafo con muchos más nodos, aunque las conclusiones serían proporcionales, el autovalor máximo de cada capa sería muy superior al que se ha obtenido con 75 nodos. Por tanto, $\frac{1}{\lambda_1(A)}$ y $\frac{1}{\lambda_1(B)}$ serían tan pequeños que la solución I en la que ambas noticias no se propagan por causas topológicas sería inapreciable.

La metodología de las pruebas es parecida a la que se siguió en la descripción teórica del modelo, es decir, se fija τ_2 y se hace variar τ_1 para ver el efecto de la competencia $N2$ como un factor externo que disminuye la susceptibilidad a ojos de $N1$. En cada simulación, se grafican, en dos curvas, la proporción de nodos en el estado Q_{N1} en función de τ_1 . La primera curva representa como la noticia τ_1 se expande sin competencia por la capa E_A , mientras que la segunda es como lo hace en competencia con $N2$, que es fija. De esta forma, podemos identificar τ_1^d como el valor para el cual la curva azul corta con la naranja y t_1^c como el valor de τ_1 para el cual la curva azul deja de ser plana en 0.

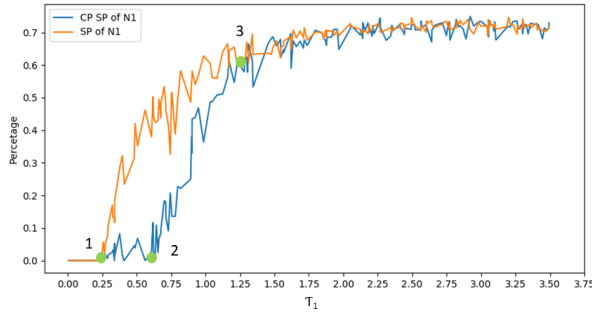
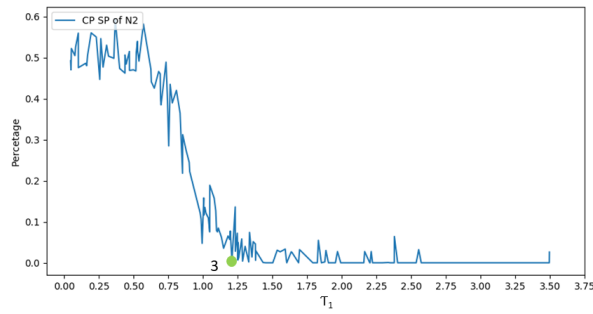
(a) Difusión de $N1$ (b) Difusión de $N2$

Figura 3.4: Difusión competitiva: $\tau_2 = 0,778$

- 1.— Este punto es donde la noticia $N1$ comienza a expandirse sin competencia por lo que debería tener un valor cercano a $\frac{1}{\lambda_1(A)} = 0,15$. Como se puede observar, la simulación replica este valor con gran precisión.
- 2.— Esta marca representa el valor de t_1^c , es decir, el valor de τ_1 para el que $N1$ comienza a propagarse en competencia. Observando la gráfica se tiene que $\tau_1^c = 0,63$ aproximadamente. La diferencia entre $\frac{1}{\lambda_1(A)} = 0,15$ y $t_1^c = 0,63$ es el resultado de la competencia con $N2$.
- 3.— En ambas gráficas, esta marca representa el valor de τ_1^d , es decir, el valor de τ_1 para el cual $N1$ comienza a dominar sobre $N2$. En la gráfica de la izquierda este valor se hace visible en el momento en que ambas curvas se superponen ($N1$ se difunde en competencia de igual manera que lo hace sin ella). Por otro lado, en la gráfica de la derecha aparece cuando el porcentaje de nodos en Q_{N2} se estabiliza en 0. En ambos casos se observa que $\tau_1^d = 1,25$ aproximadamente.

Por tanto, para esta gráfica en particular se tiene que $N1$ y $N2$ coexisten cuando $0,63 < \tau_1 < 1,25$. La figura 3.5, muestra varias ejecuciones más para distintos valores de τ_2 . Analicemos cómo la competencia de $N2$ afecta a esta región de coexistencia.

Aunque $\frac{1}{\lambda_1(B)} = 0,13$, en 3.5(a) se observa como $N2$ no se expande por su capa haciendo que $N1$ lo haga en la suya sin competencia alguna. De ahí que las dos curvas sean prácticamente iguales. Esto ocurre porque para este valor de τ_2 y un valor razonable de δ_2 , por ejemplo 0,45, se tiene que $\beta_2 = 0,07$. Es decir, lo más probable es que $N2$ desaparezca del grafo sin interrumpir la expansión de $N1$, pero no es imposible que en alguna situación si que exista algo de competencia porque matemáticamente es posible. A medida que τ_2 va creciendo la competencia se hace cada vez más y más visible, dando lugar a regiones de coexistencia cada vez más grandes. En 3.5(d) la competencia de $N2$ es tan grande que la región de coexistencia se extiende desde $\tau_1 = 0,9$ hasta $\tau_1 = 2,5$.

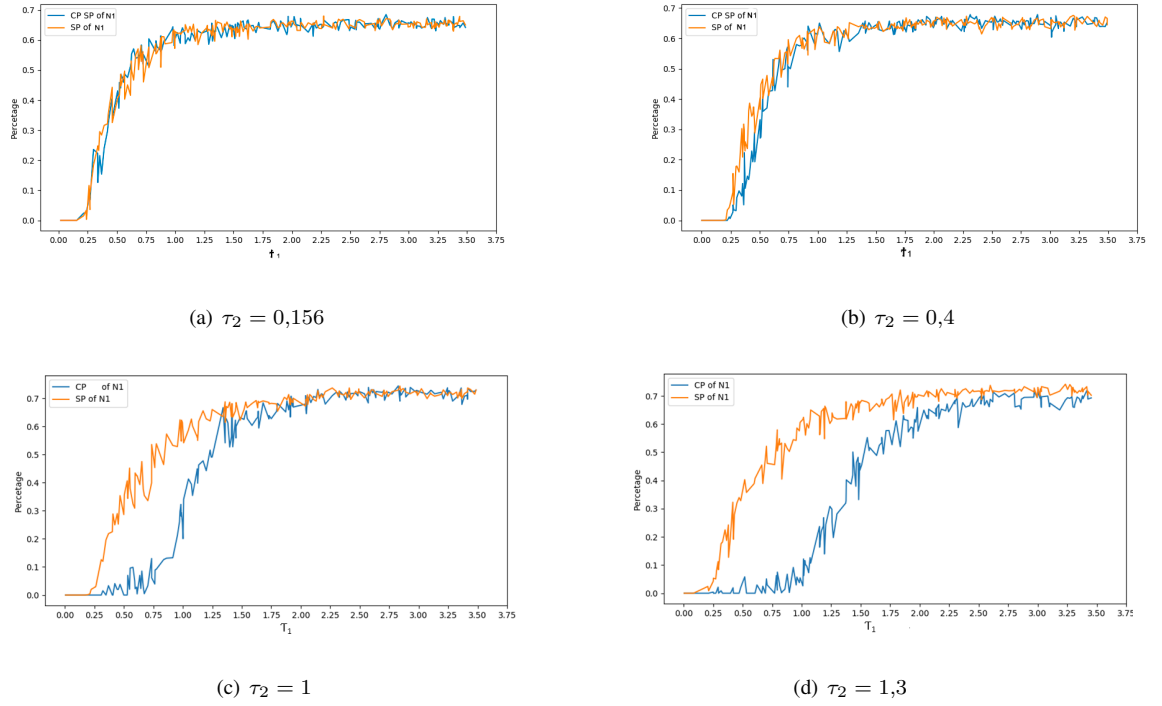


Figura 3.5: Difusión competitiva para distintos valores de τ_2

Cambiando de perspectiva, podemos realizar las mismas ejecuciones fijando τ_1 y variando τ_2 . De esta forma, podemos intuir cómo varía τ_2^c en función de τ_1 . Si dibujamos las curvas $\tau_1^c(\tau_2)$ y $\tau_2^c(\tau_1)$ obtenemos un gráfico que muestra las cuatro distintas regiones en las que queda dividido el plano (τ_1, τ_2) , que representan los cuatro tipos de interacciones que hay entre $N1$ y $N2$ en un grafo de dos capas.

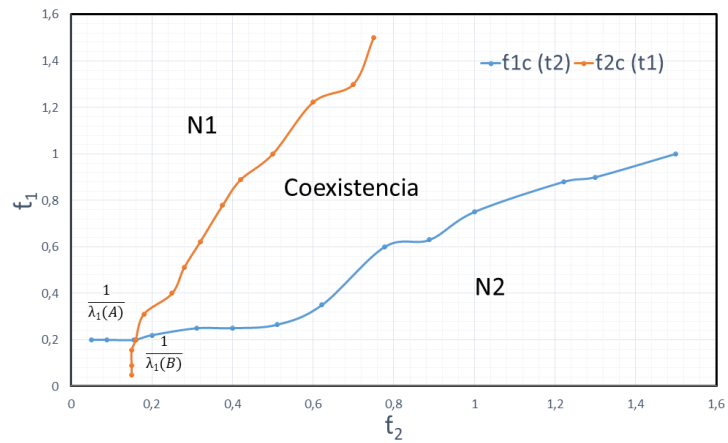


Figura 3.6: Difusión competitiva. Gráfica de umbrales.

Los resultados obtenidos son bastante precisos y concuerdan con los obtenidos en la descripción teórica del modelo. El problema del modelo SI_1SI_2S [2] es que no hace ninguna suposición adicional

con respecto a los modelos que tratan la difusión de enfermedades contagiosas, solo se adapta a la propagación en grafos. De hecho, en el contexto de la difusión de la información se pueden incluir algunas hipótesis que no tienen sentido hacerlas si modelas la propagación de enfermedades. Por ejemplo, no se prevé la posibilidad que una persona, frente a dos noticias contrarias, cambie de opinión sin volver al estado neutral, dado que en el caso de los virus esto es imposible (un virus no expulsa el otro). En las siguientes secciones, se diseñan tres modelos distintos (variaciones de SI_1SI_2S) que incluyen la posibilidad de cambiar de opinión. Los dos primeros, tan solo permiten el cambio de opinión en un solo sentido, mientras que el tercero, permite que el cambio de opinión se produzca en ambos sentidos.

3.3. Difusión competitiva: modelo $SI_1SI_2(I_1)S$

Este modelo se basa en el modelo SI_1SI_2S [2], por lo que todos los parámetros de entrada y todas las suposiciones que se hicieron en 2.4.1 se mantienen. Adicionalmente, se incluye la posibilidad de que un usuario pueda cambiar de opinión, lo que hace a este modelo ser muy adecuado para modelar situaciones de competencia en redes sociales entre una noticia verdadera $N1$ y otra falsa $N2$ con informaciones contrarias. El cambio de opinión se produce cuando se revisa el contenido de $N2$ y se descubre que es falsa. Por tanto, cambiar de opinión, en esta caso, no es más que contrastar la veracidad de la noticia $N2$ con alguna fuente.

3.3.1. Diseño y desarrollo

Esta posibilidad de revisar el contenido de $N2$ y cambiar de opinión se plasma en el modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ con una probabilidad (mayor o igual que cero) de que un nodo que este en el estado Q_{N2} transite al estado Q_{N1} sin pasar por el estado de susceptible. Esta probabilidad es directamente proporcional a β_1 , al número de vecinos que se encuentren en el estado Q_{N1} y a un nuevo parámetro de entrada $\alpha \in [0, 1]$, que representa la dificultad añadida que tiene convencer a alguien que cree en $N2$ (respecto de alguien susceptible) para que cambie de opinión.

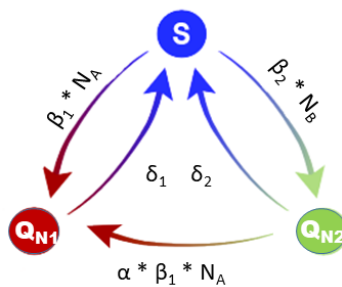


Figura 3.7: Modelo $SI_1SI_2(I_1)S$.

Las ecuaciones del modelo en base a la figura anterior se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{p}_{1,i} = \beta_1[1 - p_{1,i} - p_{2,i}] \sum_{j=1}^N a_{i,j}p_{1,j} - \delta_1 p_{1,i} + \alpha p_{2,i}\beta_1 \sum a_{i,j}p_{1,j} \\ \dot{p}_{2,i} = \beta_2[1 - p_{1,i} - p_{2,i}] \sum_{j=1}^N b_{i,j}p_{2,j} - \delta_2 p_{2,i} - \alpha p_{2,i}\beta_1 \sum a_{i,j}p_{1,j} \end{cases} \quad (3.1)$$

De nuevo basándonos en [6], la fórmula que formaliza la probabilidad de que un nodo cambie de opinión es $\alpha[1 - (1 - \beta_1)^{N_A}]$. De esta forma, fijado α , cuanto más grandes sean β_1 y N_A es más probable que un nodo revise el contenido de N_2 y transite al estado Q_{N1} .

Si nos situamos en el punto de equilibrio, es decir, $\dot{p}_{1,i} = \dot{p}_{2,i} = 0$, las ecuaciones se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{cases} p_{1,i}^* = \tau_1[1 - p_{1,i}^* - p_{2,i}^*] \sum a_{i,j}p_{1,j}^* + \alpha p_{2,i}^* \tau_1 \sum a_{i,j}p_{1,j}^* \\ p_{2,i}^* = \beta_2[1 - p_{1,i}^* - p_{2,i}^*] \sum b_{i,j}p_{2,j}^* - \alpha p_{2,i}^* \frac{\beta_1}{\delta_2} \sum a_{i,j}p_{1,j}^* \end{cases} \quad (3.2)$$

Si calculamos $\tau_1^c (p_{1,i}^*|_{\tau_1=\tau_1^c} = 0; \frac{dp_{1,i}^*}{d\tau_1}|_{\tau_1=\tau_1^c} > 0 \text{ para todo } i \in \{1, \dots, N\}; p_{2,i}^*|_{\tau_1=\tau_1^c} = y_i)$ derivando la primera ecuación respecto de τ_1 y utilizando razonamientos análogos a los expuestos en A.3 se obtiene:

$$\frac{dp_{1,i}^*}{d\tau_1} = (1 + \alpha y_i)(1 - y_i)\tau_1 \sum a_{i,j} \frac{dp_{1,j}^*}{d\tau_1} \quad (3.3)$$

Si hacemos que $A = B$, es decir, nos restringimos a grafos de una sola capa y escribimos la segunda ecuación con $p_{1,i}^* = 0$ y $p_{2,i}^* = y_i$

$$y_i = \tau_2[1 - y_i] \sum a_{i,j}y_j \implies \frac{1}{\tau_2} = \lambda_1(\text{diag}(1 - y_i)A) \quad (3.4)$$

Estudiemos el comportamiento de la ecuación 3.3 en función del parámetro α .

- Si $\alpha = 0$ y definimos $P = (\frac{dp_{1,1}^*}{d\beta_1}, \dots, \frac{dp_{1,N}^*}{d\beta_1})$, se llega a que $\tau_1^c = 1/\lambda_1(\text{diag}(1 - y_i)A)$, que junto con 3.4 se concluye que $\tau_1^c = \tau_2$. Por tanto, nos encontramos en la situación descrita en 2.4.2.
- Si $\alpha > 0$ no podemos asegurar que $\tau_1^c = \tau_2$, y por tanto, parece existir una región de coexistencia entre ambas noticias.

Si simplificamos el problema y suponemos que todos los nodos tiene el mismo número de vecinos k , es decir, $A = K * Id$, se puede demostrar teóricamente (Simone Santini, Comunicación personal) la existencia de una región de coexistencia para grafos de una capa. Para determinar la presencia o no de esta región en el problema original se han realizado un conjunto de simulaciones del modelo que se presentan en el próxima sección de pruebas y resultados.

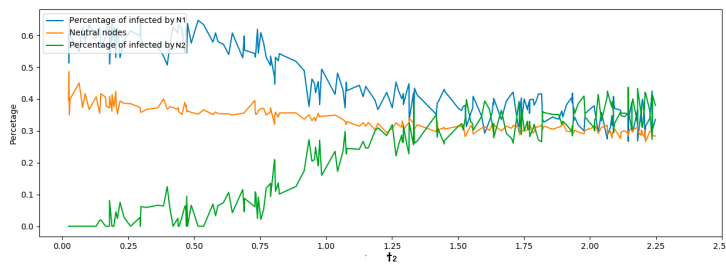
El caso en el que $A \neq B$ es complicado desde el punto de vista teórico, por lo que nos ayudaremos de las simulaciones para ver si la suposición de esta nueva hipótesis implica algún cambio respecto de los resultados obtenidos por el modelo SI_1SI_2S para grafos de dos capas.

3.3.2. Pruebas y resultados

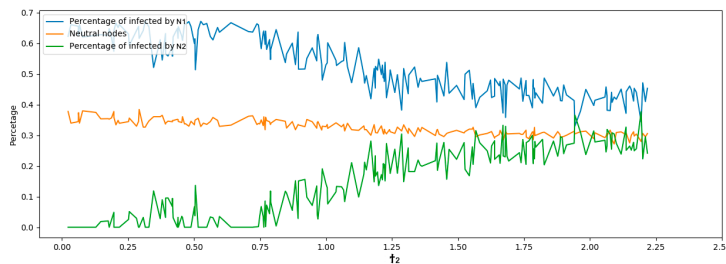
Grafos de una capa

Cuando dos noticias se expanden competitivamente en grafos de una capa según el modelo $SI_1SI_2(I_1)S$, teóricamente, parece existir una región del plano (τ_1, τ_2) para la cual ambas noticias coexisten, en contraposición con lo que ocurriría con el modelo SI_1SI_2S . La introducción del cambio de opinión es lo que parece ser la clave para que se dé dicha coexistencia. Por tanto, el objetivo de esta sección, es encontrar para que valores de (τ_1, τ_2) , esta posibilidad de que un usuario cambie de opinión permite que ambas noticias coexistan.

Fijémonos en la figura 3.7. Si fijamos τ_1 (obviamente $\tau_1 > 1/\lambda_1(A)$), la probabilidad de cambiar de opinión (contrastar el contenido de N_2) solo depende del número de vecinos que estén en el estado Q_{N_1} . Por tanto, vamos a simular el modelo variando τ_2 para ver cómo cambia el porcentaje de nodos que se encuentran en este estado. Las simulaciones que se exponen a continuación, se han realizado en un grafo de 100 nodos con $\lambda_1(A) = 17,374$ y $\alpha = 0,5$.



(a) $\tau_1 = 0,44$



(b) $\tau_1 = 0,56$

Figura 3.8: Simulación modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ con τ_1 fijo

Como se observa, para valores de τ_2 grandes es cuando aparece la coexistencia entre N_1 y N_2 . Esto se debe a que fijado τ_1 , en el momento en el que la simulación llega a un estado estacionario (los porcentajes de nodos en los distintos estados varían poco con el tiempo) siempre existe un flujo más o menos constante de nodos que transitan del estado Q_{N_2} al estado Q_{N_1} que hace que ambas noticias coexistan. A medida que τ_1 va creciendo, N_1 se va haciendo más “fuerte”, y por tanto, la

probabilidad de cambiar de opinión es cada mayor. Esto hace que la coexistencia vaya desapareciendo progresivamente hacia un dominio de $N1$.

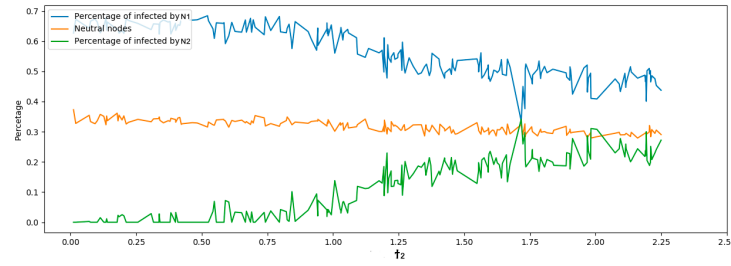


Figura 3.9: Simulación modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ con $\tau_1 = 0,65$

Ahora que ya sabemos que la coexistencia aparece en grafos de una sola capa cuando se permite cambiar de opinión, vamos a analizar para qué valores de (τ_1, τ_2) ambas noticias coexisten. Este análisis se ha hecho a partir de tablas donde se recogen los resultados de las simulaciones siguiendo un código de colores muy intuitivo que nos permite diferenciar fácilmente las regiones en las que queda dividido el plano (τ_1, τ_2) .

t_2 / t_1	0,022			0,11			0,22			0,556			0,667			1			1,33			1,556		
	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2
0,05	0	1	0	0	1	0	0,511	0,489	0	0,615	0,385	0	0,649	0,351	0	0,676	0,324	0	0,686	0,314	0	0,696	0,304	0
0,313	0	0,422	0,578	0,156	0,484	0,36	0,444	0,464	0,092	0,631	0,369	0	0,65	0,35	0	0,679	0,321	0	0,682	0,318	0	0,684	0,316	0
0,5	0	0,33	0,67	0,132	0,422	0,44	0,351	0,471	0,178	0,56	0,362	0,078	0,634	0,322	0,044	0,696	0,304	0	0,7	0,298	0	0,674	0,326	0
0,95	0	0,286	0,714	0	0,27	0,73	0,296	0,36	0,344	0,46	0,331	0,209	0,605	0,324	0,071	0,593	0,322	0,085	0,598	0,295	0,107	0,62	0,29	0,09
1,375	0	0,286	0,714	0	0,275	0,72	0,263	0,329	0,408	0,495	0,323	0,182	0,427	0,322	0,251	0,577	0,282	0,141	0,569	0,285	0,146	0,542	0,315	0,143
1,875	0	0,298	0,702	0	0,3	0,7	0,26	0,325	0,415	0,396	0,304	0,3	0,454	0,296	0,25	0,537	0,318	0,145	0,57	0,268	0,162	0,576	0,309	0,115
2	0	0,3	0,7	0	0,296	0,703	0,313	0,305	0,382	0,411	0,289	0,3	0,487	0,265	0,248	0,527	0,329	0,144	0,581	0,293	0,126	0,534	0,304	0,162

Dominio de N_1
 Coexistencia
 Dominio de N_2
 Extinción

N1: Porcentaje de nodos en Q_{N1}
 N2: Porcentaje de nodos en Q_{N2}

Figura 3.10: Tabla de simulaciones. Modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ ($\alpha = 0,5$)

Al simular el modelo para unos pocos pares (τ_1, τ_2) con $\alpha = 0,5$, no podemos definir cuál es la región de coexistencia con exactitud, pero sí dar una aproximación bastante buena. Como se puede observar, para este valor de α , la coexistencia se da para $\tau_1 \in [0,22 \text{ y } 0,556]$ y valores de τ_2 altos. Esto se debe a que si elegimos $\tau_1 > 0,556$, la fortaleza de $N1$ junto con la alta probabilidad que existe de que un nodo cambie de opinión (muy cercana a 1) provoca que $N1$ acabe dominando sobre $N2$. Por el contrario, si $\tau_1 < 0,2$ aproximadamente, la probabilidad de cambiar de opinión es tan baja que no afecta al esperado dominio de $N2$. Por tanto, la coexistencia aparece en esta región intermedia en la que τ_1 no es demasiado fuerte ni demasiado débil. Por último, ambas noticias coexisten para valores altos de τ_2 , ya que cuanto más fuerte sea $N2$ mayor proporción de nodos estarán en el estado Q_{N2} , y por tanto, mayor cantidad de nodos podrán contrastar esta noticia y transitar al estado Q_{N1} . Este movimiento de los nodos es la clave por la cual se produce la coexistencia.

Para tener una perspectiva más general del modelo, hemos repetido este último tipo de prueba para distintos valores de α con el objetivo de ver cómo varía esta región de coexistencia para distintos

valores de este parámetro. Recordemos que si $\alpha = 0$, el modelo que resulta es SI_1SI_2S que no permite la coexistencia de noticias en competencia grafos de un capa. Veamos que sucede para valores de α positivos en $(0, 1]$.

t_2 / t_1	0,022			0,1556			0,22			0,556			0,667			1			1,33			1,556		
	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2
0,05	0	1	0	0,402	0,598	0	0,481	0,519	0	0,625	0,375	0	0,635	0,365	0	0,692	0,308	0	0,689	0,311	0	0,694	0,306	0
0,3125	0	0,435	0,565	0,088	0,472	0,44	0,21	0,513	0,332	0,625	0,375	0	0,652	0,348	0	0,679	0,321	0	0,687	0,313	0	0,694	0,306	0
0,5	0	0,361	0,639	0	0,38	0,62	0,102	0,332	0,576	0,423	0,377	0,2	0,477	0,368	0,155	0,669	0,331	0	0,689	0,311	0	0,6	0,32	0,68
0,95	0	0,27	0,73	0	0,328	0,672	0,078	0,316	0,606	0,3	0,332	0,373	0,3	0,35	0,35	0,438	0,303	0,259	0,48	0,32	0,2	0,49	0,311	0,199
1,375	0	0,31	0,69	0	0,296	0,705	0,05	0,4	0,55	0,281	0,318	0,4	0,319	0,301	0,38	0,387	0,301	0,312	0,44	0,32	0,24	0,45	0,302	0,248
1,875	0	0,292	0,708	0	0,298	0,702	0	0,288	0,711	0,241	0,295	0,464	0,304	0,299	0,397	0,346	0,297	0,357	0,399	0,279	0,328	0,398	0,306	0,297
2	0	0,287	0,713	0	0,298	0,702	0	0,278	0,722	0,229	0,283	0,478	0,27	0,33	0,4	0,359	0,309	0,332	0,396	0,301	0,308	0,4	0,32	0,28

■ Dominio de N_1 ■ Coexistencia ■ Dominio de N_2 Extinción

☐ N1: Porcentaje de nodos en Q_{N1} ☐ N2: Porcentaje de nodos en Q_{N2}

(a) $\alpha = 0,1$

t_2 / t_1	0,022			0,1556			0,22			0,556			0,667			1			1,33			1,556		
	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2
0,05	0	1	0	0,363	0,637	0	0,465	0,535	0	0,601	0,399	0	0,633	0,367	0	0,642	0,358	0	0,706	0,294	0	0,694	0,306	0
0,3125	0	0,437	0,563	0,157	0,481	0,362	0,27	0,468	0,205	0,631	0,369	0	0,636	0,364	0	0,624	0,339	0,257	0,7	0,3	0	0,686	0,314	0
0,5	0	0,356	0,644	0,093	0,382	0,515	0,224	0,403	0,373	0,484	0,376	0,13	0,493	0,38	0,127	0,551	0,321	0,128	0,692	0,308	0	0,702	0,298	0
0,95	0	0,296	0,704	0	0,312	0,688	0,188	0,33	0,482	0,364	0,339	0,297	0,446	0,345	0,209	0,477	0,323	0,2	0,56	0,299	0,141	0,52	0,3	0,18
1,375	0	0,291	0,709	0,094	0,295	0,611	0,159	0,306	0,535	0,358	0,327	0,315	0,361	0,328	0,281	0,463	0,304	0,239	0,446	0,317	0,237	0,499	0,322	0,195
1,875	0	0,305	0,695	0	0,297	0,703	0,114	0,282	0,604	0,337	0,308	0,355	0,38	0,301	0,319	0,489	0,288	0,279	0,45	0,3	0,25	0,492	0,325	0,199
2	0	0,301	0,699	0	0,284	0,716	0	0,282	0,708	0,354	0,305	0,341	0,391	0,306	0,303	0,427	0,282	0,291	0,476	0,292	0,242	0,495	0,295	0,21

■ Dominio de N_1 ■ Coexistencia ■ Dominio de N_2 Extinción

☐ N1: Porcentaje de nodos en Q_{N1} ☐ N2: Porcentaje de nodos en Q_{N2}

(b) $\alpha = 0,25$

t_2 / t_1	0,022			0,1556			0,22			0,556			0,667			1			1,33			1,556		
	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2
0,05	0	1	0	0,401	0,599	0	0,517	0,483	0	0,648	0,352	0	0,676	0,324	0	0,682	0,318	0	0,68	0,32	0	0,665	0,335	0
0,3125	0	0,397	0,603	0,409	0,591	0,06	0,482	0,518	0	0,654	0,346	0	0,672	0,328	0	0,669	0,331	0	0,706	0,294	0	0,683	0,317	0
0,5	0	0,328	0,672	0,346	0,456	0,198	0,411	0,478	0,11	0,625	0,375	0	0,688	0,302	0	0,659	0,341	0	0,689	0,311	0	0,679	0,321	0
0,95	0	0,285	0,715	0,266	0,345	0,389	0,384	0,382	0,234	0,566	0,324	0,11	0,672	0,328	0	0,652	0,3	0,048	0,647	0,309	0,044	0,699	0,301	0
1,375	0	0,292	0,708	0,276	0,315	0,409	0,327	0,334	0,339	0,547	0,339	0,114	0,586	0,313	0,101	0,61	0,315	0,075	0,633	0,299	0,068	0,606	0,297	0,097
1,875	0	0,31	0,69	0,258	0,282	0,46	0,33	0,265	0,385	0,508	0,355	0,137	0,561	0,323	0,116	0,6	0,277	0,123	0,619	0,287	0,084	0,631	0,3	0,089
2	0	0,294	0,706	0,206	0,337	0,457	0,313	0,292	0,395	0,577	0,322	0,121	0,592	0,285	0,123	0,611	0,295	0,099	0,619	0,303	0,078	0,633	0,302	0,065

■ Dominio de N_1 ■ Coexistencia ■ Dominio de N_2 Extinción

☐ N1: Porcentaje de nodos en Q_{N1} ☐ N2: Porcentaje de nodos en Q_{N2}

(c) $\alpha = 0,75$

t_2 / t_1	0,022			0,1556			0,22			0,556			0,667			1			1,33			1,556		
	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2
0,05	0	1	0	0,417	0,583	0	0,495	0,505	0	0,637	0,363	0	0,668	0,332	0	0,672	0,328	0	0,691	0,309	0	0,66	0,34	0
0,3125	0	0,414	0,586	0,414	0,586	0	0,484	0,516	0	0,662	0,338	0	0,657	0,343	0	0,688	0,312	0	0,652	0,348	0	0,688	0,312	0
0,5	0	0,342	0,658	0,372	0,49	0,138	0,442	0,453	0,105	0,644	0,356	0	0,644	0,356	0	0,681	0,319	0	0,683	0,317	0	0,69	0,31	0
0,95	0	0,299	0,701	0,357	0,345	0,298	0,442	0,396	0,162	0,57	0,346	0,084	0,649	0,313	0,038	0,658	0,31	0,032	0,624	0,322	0,054	0,651	0,32	0,029
1,375	0	0,275	0,725	0,294	0,252	0,354	0,342	0,364	0,294	0,574	0,333	0,093	0,605	0,309	0,086	0,636	0,289	0,075	0,691	0,309	0	0,645	0,284	0,071
1,875	0	0,281	0,719	0,288	0,31	0,402	0,418	0,332	0,25	0,561	0,326	0,113	0,641	0,287	0,072	0,616	0,318	0,066	0,655	0,28	0,055	0,654	0,297	0,049
2	0	0,284	0,736	0,261	0,313	0,426	0,41	0,31	0,28	0,563	0,286	0,088	0,553	0,298	0,1	0,635	0,294	0,071	0,606	0,319	0,075	0,594	0,308	0,098

■ Dominio de N_1 ■ Coexistencia ■ Dominio de N_2 Extinción

☐ N1: Porcentaje de nodos en Q_{N1} ☐ N2: Porcentaje de nodos en Q_{N2}

(d) $\alpha = 1$

Figura 3.11: Simulación modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ para distintos valores de α

Si echamos un ojo a los resultados de la figura 3.11, se puede intuir que en el momento en el que la probabilidad de cambiar de opinión deja de ser constante en 0, es decir, $\alpha > 0$ aparece la región de coexistencia de N_1 y N_2 . Esta zona del plano (τ_1, τ_2) para la cual coexisten ambas noticias se amplía progresivamente (a medida que crece la probabilidad de cambiar de opinión con α) hasta alcanzar su máxima expansión para valores de α entre 0,1 y 0,25. Una vez que se sobrepasa este máximo, como se observa en 3.11(c) y 3.11(d), esta región comienza a encogerse en tanto que α se acerca

a 1, refugiándose en valores altos de τ_2 y valores de τ_1 entre 0,1556 y 0,22. Si permitimos que $\alpha > 1$, llegará un momento en el que la probabilidad de cambio sea mayor o igual que 1 en cualquier situación. En este momento, la coexistencia desaparece del plano (τ_1, τ_2) derivando en un completo dominio de $N1$ sobre $N2$.

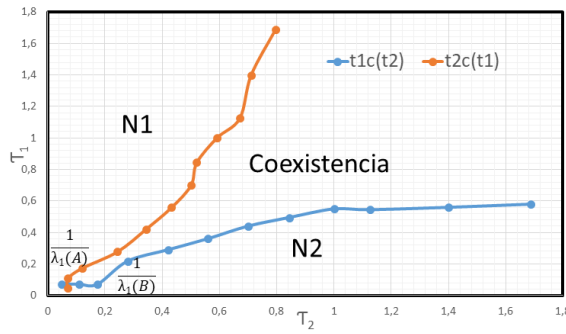
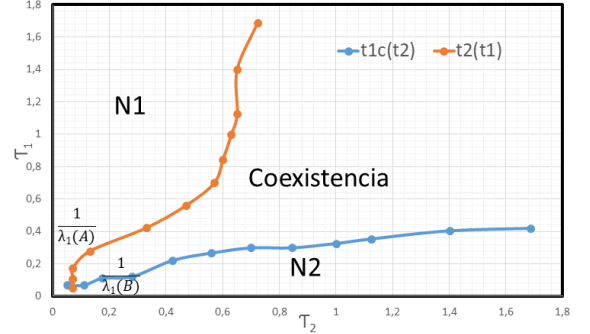
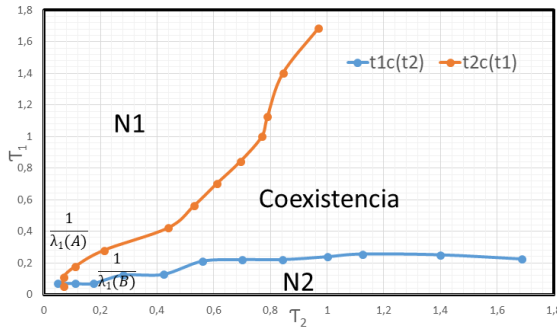
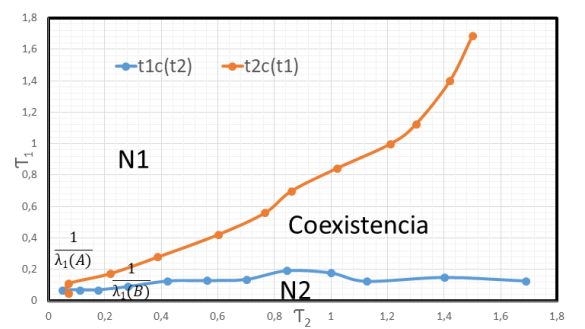
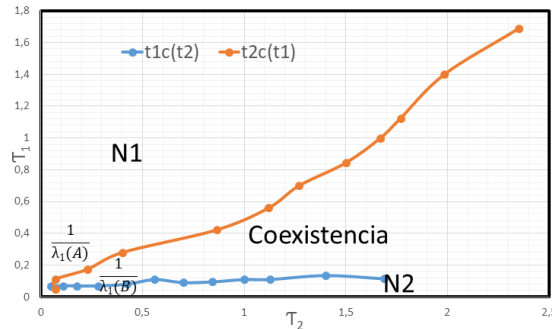
(a) $\alpha = 0,05$ (b) $\alpha = 0,1$ (c) $\alpha = 0,25$ (d) $\alpha = 0,5$ (e) $\alpha = 0,75$

Figura 3.12: Gráfica de umbrales del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ para distintos valores de α

En conclusión, hemos comprobado que dos noticias en competencia en grafos de una capa son capaces de coexistir si se permite que los usuarios cambien de opinión con una cierta probabilidad que depende del nuevo parámetro de entrada α . Además hemos visto que esta coexistencia es máxima para valores de α entre 0,1 y 0,25.

Grafos de dos capas

Para observar el efecto que tiene introducir la posibilidad de cambiar de opinión en grafos de dos capas, vamos a utilizar el mismo tipo de prueba que usamos para demostrar la coexistencia en el modelo SI_1SI_2S , es decir, fijar τ_2 y representar el porcentaje de nodos en el estado Q_{N1} para diferentes valores de τ_1 . La imagen que se adjunta a continuación corresponde con una simulación en un grafo de dos capas de 100 nodos y una noticia $N2$ fija con $\tau_2 = 0,75$, donde cada curva es una versión del modelo para un α determinado. De esta forma, podemos ver el impacto que tiene introducir el cambio de opinión para distintos valores de α en la misma figura.

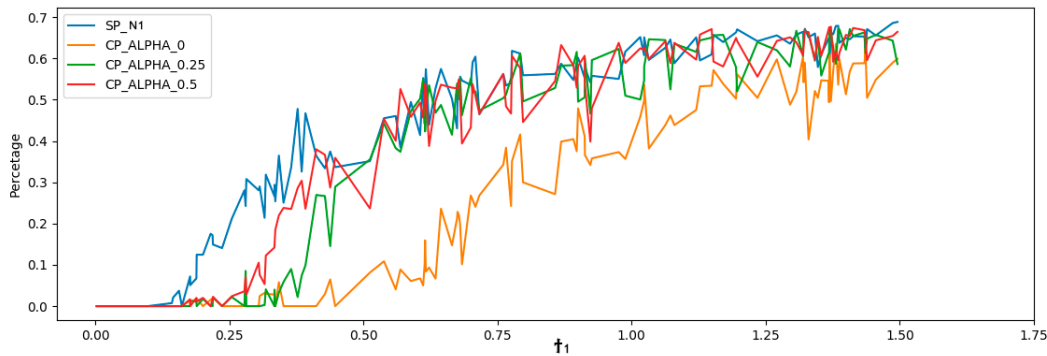


Figura 3.13: Grafo de dos capas. Modelo $SI_1SI_2(I_1)S$

La curva azul muestra como la noticia $N1$ se propaga sin la competencia de $N2$ por su capa. Por otra parte, la curva naranja, verde y roja son simulaciones del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ para $\alpha = 0$, $\alpha = 0,25$ y $\alpha = 0,5$ respectivamente. Recordemos que si $\alpha = 0$, el modelo que resulta es el SI_1SI_2S . Como se observa en la figura, la competencia de $N2$, con $\alpha = 0$, da lugar a una coexistencia mayor que para valores de α positivos. De hecho, a medida que crece α la competencia de $N2$ va debilitándose, haciendo que la coexistencia vaya desapareciendo. Esto se debe a que la posibilidad de cambiar de opinión sin pasar al estado de susceptible es un atajo hacia el dominio de $N1$, y cuanto más probabilidades haya de coger este atajo antes aparecerá el valor τ_1^d .

Si repetimos esta prueba para distintos valores de τ_2 , podemos dibujar las curvas umbrales $\tau_1^c(\tau_2)$ y $\tau_2^c(\tau_1)$, y obtener un comportamiento estimado del modelo en función de α .

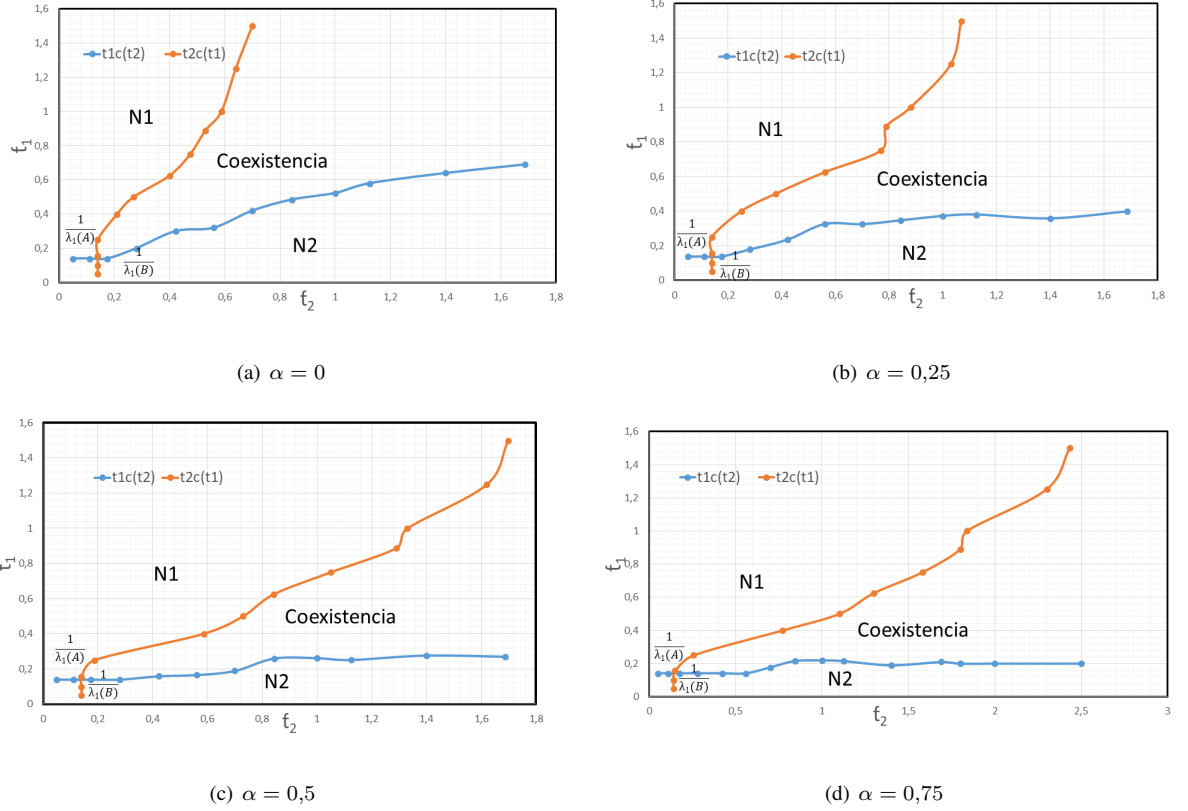


Figura 3.14: Difusión competitiva para distintos valores de α . Gráfica de umbrales.

Como vimos en la ecuación 3.3, el valor de τ_1^c dependía del valor de α . Si nos fijamos en las cuatro gráficas, observamos que, si fijamos τ_2 , $\tau_1^c(\alpha)$ es una función decreciente que tiende al valor $\frac{1}{\lambda_1(A)}$ (este hecho se puede observar también en la figura 3.13). Por otro lado, $\tau_2^c(\alpha)$ (fijado τ_1) es una función creciente respecto de α , ya que si cada vez es más probable que se cambie de opinión, más fuerte se vuelve $N1$. Esto provoca que ambas curvas se vayan cerrando, disminuyendo la región de coexistencia. Si permitimos que $\alpha > 1$, es decir, convencer a una persona en Q_{N2} es más sencillo que a una susceptible para que cambie de opinión (una suposición poco real), el posible límite, para α suficientemente grande, es un plano (τ_1, τ_2) en el que no existe coexistencia, ya que en el momento en el que $\tau_1 > \tau_1^c$, $N1$ dominará sobre $N2$.

3.3.3. Otra perspectiva

En el modelo anterior, la probabilidad de cambiar de opinión dependía, entre otras cosas, del número de vecinos que no están de acuerdo con el falso rumor $N2$. Sin embargo, en ocasiones, no hace falta tener muchos amigos que desconfíen de esta noticia para que un nodo tenga una alta probabilidad de revisar su contenido. Entonces, basándonos en el modelo propuesto por [7], podemos cambiar de perspectiva y hacer que esta probabilidad solo dependa de β_1 , es decir, que sea constante para una noticia $N1$ fijada.

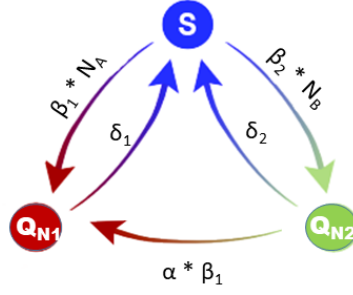


Figura 3.15: Modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ con probabilidad de cambio de opinión constante fijado $N1$.

Las ecuaciones del modelo se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{p}_{1,i} = \beta_1(1 - p_{1,i} - p_{2,i}) \sum_{j=1}^N a_{i,j} p_{1,j} - \delta_1 p_{1,i} + \alpha \beta_1 p_{2,i} \\ \dot{p}_{2,i} = \beta_2(1 - p_{1,i} - p_{2,i}) \sum_{j=1}^N b_{i,j} p_{2,j} - \delta_2 p_{2,i} - \alpha \beta_1 p_{2,i} \end{cases} \quad (3.5)$$

En el punto de equilibrio se obtiene:

$$\begin{cases} p_{1,i}^* = \tau_1(1 - p_{1,i}^* - p_{2,i}^*) \sum a_{i,j} p_{1,j}^* + \alpha \tau_1 p_{2,i}^* \\ p_{2,i}^* = \tau_2(1 - p_{1,i}^* - p_{2,i}^*) \sum b_{i,j} p_{2,j}^* - \alpha \tau_1 \frac{\delta_1}{\delta_2} p_{2,i}^* \end{cases} \quad (3.6)$$

Si comparamos estas ecuaciones con las del modelo SI_1SI_2S en equilibrio, la única diferencia son los dos sumandos parecidos que aparecen al final de ambas ecuaciones. En la primera ecuación, este último término provoca que $p_{1,i}^*$ aumenta a medida que τ_1 crece, mientras que en la segunda tiene el efecto contrario respecto de $p_{2,i}^*$. Intuitivamente, si cogemos τ_2 grande del tal forma que $p_{2,i}$ es alta, podemos elegir τ_1 suficientemente grande para que exista un tránsito constante del estado Q_{N2} al Q_{N1} . Por tanto, parece que existe una región de coexistencia incluso para el caso $A = B$.

Pruebas y resultados

Esta nueva perspectiva del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ parece indicar de nuevo la aparición de una región de coexistencia en el plano (τ_1, τ_2) tanto en grafos de una capa como de dos capas. En ambos tipos de grafos se observan resultados similares a los que se obtuvieron en la versión anterior de este modelo con ciertos detalles interesantes que merece la pena analizar y explicar.

En primer lugar, las simulaciones en grafos de una capa muestran la misma estructura que en la figura 3.11, es decir, una región de coexistencia que se abre paso progresivamente entre los dominios de $N1$ y $N2$ a medida que crece α , hasta alcanzar la máxima coexistencia posible para valores de α cercanos a 0,25. Una vez que se supera este límite, esta región decrece al tiempo que α tiende a 1.

t_2 / t_1	0,022			0,1556			0,22			0,556			0,667			1			1,33			1,556		
	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2
0,05	0	1	0	0,16	0,84	0	0,41	0,57	0	0,608	0,392	0	0,669	0,331	0	0,664	0,336	0	0,681	0,319	0	0,667	0,333	0
0,3125	0,001	0,465	0,534	0,026	0,492	0,482	0,123	0,477	0,4	0,464	0,413	0,133	0,539	0,388	0,073	0,54	0,365	0,095	0,596	0,335	0,069	0,624	0,315	0,061
0,5	0,003	0,366	0,631	0,038	0,393	0,569	0,073	0,423	0,504	0,374	0,382	0,244	0,479	0,349	0,172	0,49	0,334	0,176	0,569	0,375	0,106	0,571	0,314	0,116
0,95	0,004	0,334	0,662	0,023	0,288	0,689	0,068	0,329	0,603	0,27	0,345	0,385	0,324	0,332	0,334	0,4	0,31	0,252	0,46	0,3	0,24	0,45	0,3	0,25
1,375	0,002	0,294	0,704	0,042	0,306	0,652	0,053	0,276	0,671	0,184	0,326	0,49	0,264	0,329	0,407	0,364	0,299	0,337	0,4	0,305	0,295	0,439	0,289	0,272
1,875	0,001	0,288	0,711	0,02	0,313	0,667	0,06	0,301	0,689	0,181	0,321	0,498	0,243	0,314	0,443	0,309	0,314	0,377	0,379	0,284	0,337	0,406	0,296	0,298
2	0	0,287	0,713	0,014	0,294	0,692	0,063	0,27	0,667	0,194	0,339	0,467	0,218	0,323	0,46	0,349	0,302	0,349	0,35	0,313	0,337	0,382	0,301	0,317

■ Dominio de N_1 ■ Coexistencia ■ Dominio de N_2 □ Extinción

□ N1: Porcentaje de nodos en Q_{N1} □ N2: Porcentaje de nodos en Q_{N2}

(a) $\alpha = 0,1$

t_2 / t_1	0,022			0,1556			0,22			0,556			0,667			1			1,33			1,556		
	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2
0,05	0	1	0	0,397	0,603	0	0,493	0,507	0	0,658	0,342	0	0,63	0,37	0	0,662	0,338	0	0,676	0,324	0	0,698	0,302	0
0,3125	0	0,433	0,565	0,07	0,499	0,431	0,209	0,484	0,307	0,54	0,368	0,092	0,552	0,36	0,083	0,665	0,335	0	0,666	0,334	0	0,684	0,316	0
0,5	0	0,369	0,628	0,056	0,395	0,549	0,133	0,395	0,472	0,405	0,368	0,227	0,504	0,376	0,12	0,517	0,336	0,147	0,58	0,314	0,106	0,623	0,313	0,064
0,95	0	0,3	0,7	0,055	0,314	0,631	0,121	0,303	0,576	0,324	0,324	0,352	0,33	0,348	0,322	0,473	0,316	0,211	0,504	0,337	0,159	0,552	0,281	0,167
1,375	0	0,3	0,7	0,045	0,313	0,642	0,087	0,299	0,614	0,312	0,333	0,355	0,305	0,33	0,365	0,401	0,332	0,267	0,441	0,325	0,234	0,5	0,303	0,197
1,875	0	0,3	0,7	0,044	0,286	0,67	0,075	0,271	0,654	0,298	0,317	0,385	0,298	0,313	0,389	0,373	0,324	0,303	0,453	0,299	0,248	0,445	0,294	0,261
2	0	0,27	0,73	0,031	0,303	0,667	0,065	0,302	0,633	0,264	0,309	0,427	0,293	0,305	0,402	0,377	0,31	0,313	0,44	0,297	0,263	0,456	0,292	0,252

■ Dominio de N_1 ■ Coexistencia ■ Dominio de N_2 □ Extinción

□ N1: Porcentaje de nodos en Q_{N1} □ N2: Porcentaje de nodos en Q_{N2}

(b) $\alpha = 0,25$

t_2 / t_1	0,022			0,1556			0,22			0,556			0,667			1			1,33			1,556		
	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2
0,05	0	1	0	0,37	0,63	0	0,461	0,539	0	0,634	0,366	0	0,65	0,35	0	0,68	0,32	0	0,682	0,318	0	0,697	0,303	0
0,3125	0,007	0,449	0,544	0,091	0,469	0,46	0,255	0,436	0,259	0,549	0,393	0,074	0,583	0,351	0,066	0,689	0,311	0	0,683	0,317	0	0,643	0,357	0
0,5	0,008	0,363	0,629	0,108	0,409	0,483	0,19	0,416	0,394	0,476	0,365	0,159	0,499	0,377	0,124	0,585	0,348	0,067	0,616	0,322	0,062	0,623	0,313	0,064
0,95	0,004	0,292	0,704	0,088	0,33	0,582	0,139	0,344	0,517	0,39	0,332	0,278	0,43	0,326	0,244	0,485	0,346	0,169	0,505	0,326	0,169	0,588	0,319	0,083
1,375	0,013	0,312	0,675	0,084	0,303	0,613	0,163	0,303	0,534	0,351	0,329	0,32	0,369	0,341	0,29	0,481	0,285	0,234	0,529	0,284	0,187	0,581	0,294	0,125
1,875	0,014	0,283	0,703	0,075	0,295	0,63	0,144	0,291	0,565	0,346	0,311	0,343	0,376	0,313	0,311	0,459	0,292	0,249	0,518	0,307	0,175	0,532	0,3	0,168
2	0,004	0,289	0,707	0,063	0,301	0,616	0,163	0,274	0,569	0,33	0,298	0,372	0,355	0,32	0,325	0,439	0,298	0,263	0,543	0,274	0,183	0,536	0,314	0,15

■ Dominio de N_1 ■ Coexistencia ■ Dominio de N_2 □ Extinción

□ N1: Porcentaje de nodos en Q_{N1} □ N2: Porcentaje de nodos en Q_{N2}

(c) $\alpha = 0,5$

t_2 / t_1	0,022			0,1556			0,22			0,556			0,667			1			1,33			1,556		
	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2
0,05	0	1	0	0,33	0,667	0	0,451	0,549	0	0,62	0,38	0	0,633	0,367	0	0,653	0,347	0	0,645	0,355	0	0,648	0,352	0
0,3125	0,007	0,469	0,534	0,137	0,514	0,349	0,25	0,534	0,215	0,635	0,375	0	0,686	0,314	0	0,677	0,323	0	0,671	0,329	0	0,693	0,307	0
0,5	0,014	0,361	0,625	0,105	0,418	0,477	0,223	0,401	0,376	0,442	0,407	0,151	0,575	0,359	0,096	0,601	0,331	0,068	0,608	0,302	0	0,656	0,311	0,039
0,95	0,009	0,328	0,669	0,119	0,312	0,569	0,169	0,343	0,488	0,435	0,35	0,215	0,49	0,329	0,181	0,556	0,32	0,124	0,612	0,319	0,069	0,641	0,299	0,06
1,375	0,01	0,32	0,67	0,11	0,308	0,582	0,171	0,312	0,517	0,365	0,349	0,29	0,47	0,314	0,216	0,568	0,305	0,127	0,597	0,294	0,109	0,615	0,301	0,084
1,875	0,005	0,298	0,697	0,103	0,303	0,594	0,172	0,294	0,534	0,355	0,294	0,351	0,414	0,327	0,259	0,529	0,289	0,182	0,59	0,286	0,124	0,576	0,306	0,118
2	0,009	0,255	0,736	0,128	0,288	0,584	0,17	0,311	0,522	0,362	0,305	0,393	0,397	0,326	0,277	0,51	0,287	0,208	0,527	0,303	0,17	0,56	0,31	0,13

■ Dominio de N_1 ■ Coexistencia ■ Dominio de N_2 □ Extinción

□ N1: Porcentaje de nodos en Q_{N1} □ N2: Porcentaje de nodos en Q_{N2}

(d) $\alpha = 0,75$

Figura 3.16: Simulaciones del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ con cambio de perspectiva en función de α

La principal diferencia que se observa entre las simulaciones expuestas en la tabla 3.11 y la tabla 3.16 es que la región de coexistencia está desplazada hacia la derecha, es decir, $N1$ y $N2$ coexisten para valores algo más altos de τ_1 en esta segunda versión del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$. Esto se debe a que la fase en la que $N2$ domina sobre $N1$ (zona roja) coge más protagonismo dentro de las tablas, es decir, a $N1$ le cuesta más comenzar a competir con $N2$ dentro del grafo. Este retardo que se observa, es culpa de la única diferencia que existe entre ambos modelos, la dependencia del cambio de opinión del número en el vecinos en el estado Q_{N1} . Por tanto, hemos probado que de verdad la influencia de los vecinos tiene un efecto visible en el comportamiento de los nodos, provocando que estos cambien de opinión aunque la noticia $N1$ no sea tan fuerte como para que el propio nodo hubiese cambiado de opinión por su cuenta.

En cuanto a grafos de dos capas, las simulaciones en grafos de dos capas nos muestran dos diferencias significativas respecto del modelo anterior:

- Las curvas de las simulaciones con $\alpha > 0$ son crecientes para cualquier valor de τ_1 . Es decir, estas curvas ya no quedan ancladas en 0 hasta que se supera el umbral de supervivencia t_1^c . En la figura 3.13 esto no ocurre, ya que para esa versión del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$, la probabilidad de cambiar de opinión era 0 hasta que $\tau_1 > \tau_1^c$ (hasta este momento al no haber ningún nodo en el estado Q_{N1} , la probabilidad de que un nodo cambiase de opinión era 0). Sin embargo, desde esta perspectiva del modelo siempre, por muy pequeño que sea, existe un flujo de nodos que transitan del estado Q_{N1} a Q_{N2} haciendo que las curvas dejen de valer 0 para valores pequeños de τ_1 . Por tanto, no tiene sentido hablar de τ_1^c .
- El segundo detalle a destacar es la diferencia entre los umbrales de dominancia t_1^d de las curvas con $\alpha > 0$, siendo estos valores más pequeños en la anterior versión del modelo que en esta. De nuevo, esto se debe al efecto que tiene la influencia de los vecinos de un nodo para hacer que este cambie de opinión aunque τ_1 no sea lo suficientemente fuerte para que el propio nodo lo hiciese con independencia de la opinión de sus vecinos.

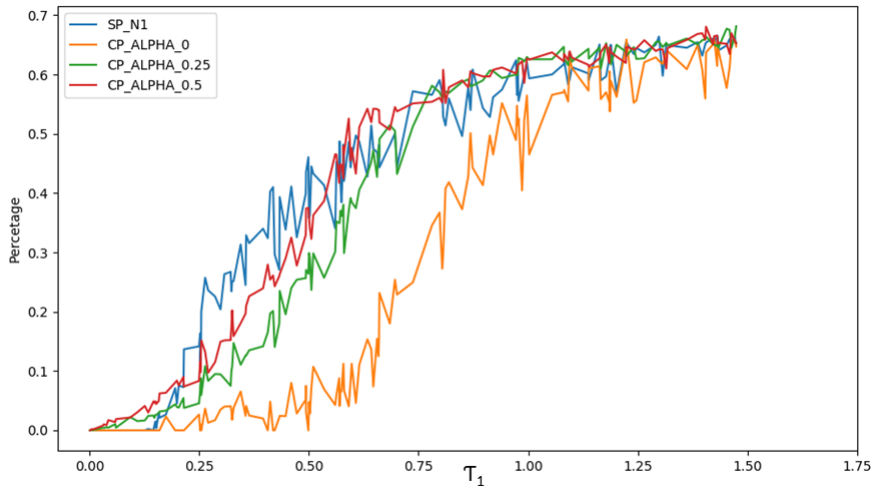


Figura 3.17: Simulación del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ en grafos de dos capas para distintos α

3.4. Difusión competitiva: modelo $SI_1(S)I_2S$

Este modelo se basa también en el modelo SI_1SI_2S , por lo que, de nuevo, todas las suposiciones y entradas al modelo detalladas en 2.4.1 se conservan. La novedad de este modelo respecto a los anteriores es que este soporta un cambio de opinión bidireccional, es decir, que un nodo que cree en $N1$ con cierta probabilidad puede convertirse en defensor de $N2$ sin pasar por el estado de susceptible, y viceversa. Este modelo es idóneo para modelar aquellas situaciones en las que se produce algún tipo de debate en redes sociales con dos opiniones contrarias.

3.4.1. Diseño y desarrollo

Las probabilidades de los cambios de opinión pueden definirse desde las dos perspectivas que consideramos para el modelo anterior, es decir, podemos hacer que dependan o no del número de vecinos en los estados Q_{N1} y Q_{N2} . Sin embargo, en el ámbito de redes sociales es mucho más conveniente aplicar el modelo en el que el cambio de opinión de un usuario está influenciado por la opinión de sus amigos.

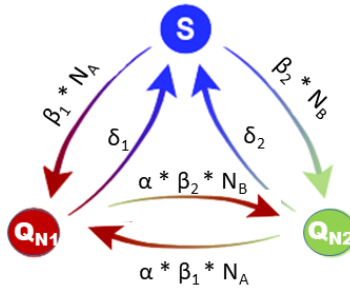


Figura 3.18: Modelo $SI_1(S)I_2S$

Si nos situamos en el punto de equilibrio ($\dot{p}_{1,i} = \dot{p}_{2,i} = 0$), las ecuaciones se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta_1} \dot{p}_{1,i} = \beta_1 [1 - p_{1,i} - p_{2,i}] \sum a_{ij} p_{1,j}^* + \alpha p_{2,i} \beta_1 \sum a_{ij} p_{1,j}^* - \alpha p_{1,i} \beta_2 \sum b_{ij} p_{2,j}^* \\ \frac{1}{\delta_2} \dot{p}_{2,i} = \beta_2 [1 - p_{1,i} - p_{2,i}] \sum b_{ij} p_{2,j}^* + \alpha p_{1,i} \beta_2 \sum b_{ij} p_{2,j}^* - \alpha p_{2,i} \beta_1 \sum a_{ij} p_{1,j}^* \end{cases} \quad (3.7)$$

3.4.2. Pruebas y resultados

Grafos de una capa

Si introducimos la posibilidad de que todos los nodos que se hayan creído una noticia como verdadera puedan cambiar de opinión, necesitamos ver si la región de coexistencia que aparecía con el modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ se mantiene o desaparece para los distintos valores de α . Una primera aproximación para ver si dos noticias en un grafo de una sola capa pueden coexistir es fijar τ_2 y ver cómo varían los porcentajes de nodos en el estado Q_{N1} para distintos valores de τ_1 y α . En este caso en particular, se ha elegido un grafo de 100 nodos y una noticia $N2$ con $\tau_2 = 0,75$.

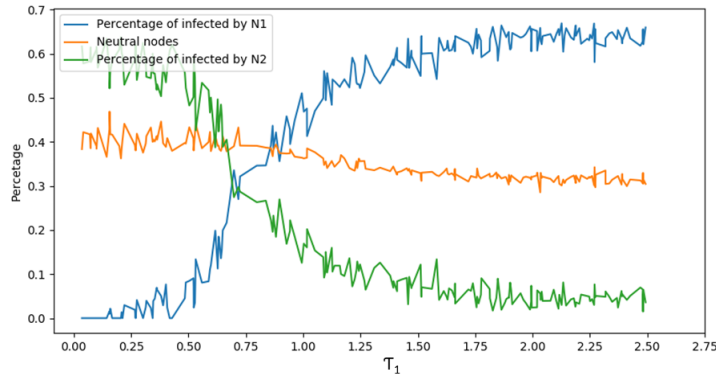
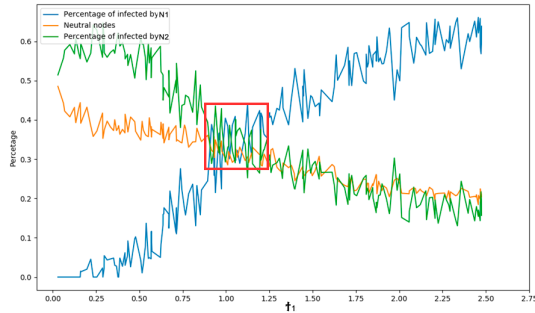
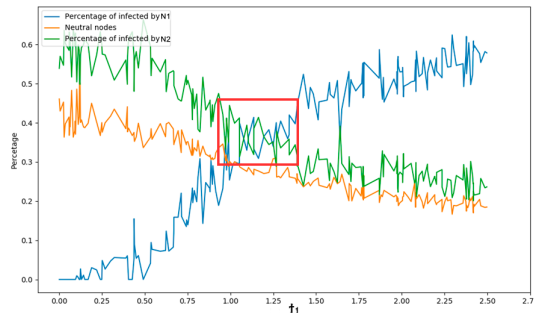
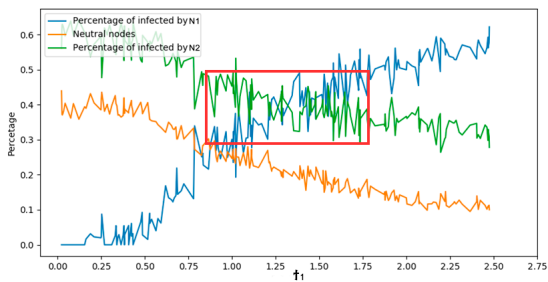
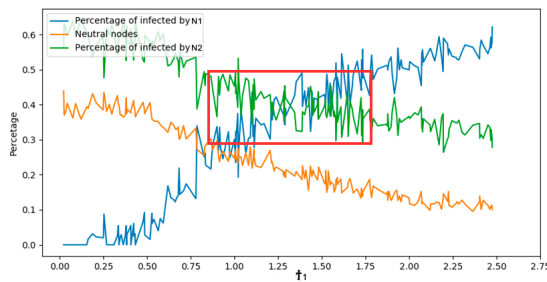
(a) $\alpha = 0$ (b) $\alpha = 0,25$ (c) $\alpha = 0,5$ (d) $\alpha = 0,75$ (e) $\alpha = 1$

Figura 3.19: Difusión competitiva para distintos valores α con $\tau_2 = 0,75$

Los resultados de la figura anterior, verifican la existencia de una región para la cual $N1$ y $N2$ coexisten

en un grafo de una sola capa para valores de α positivos. De nuevo, el caso $\alpha = 0$ se corresponde con el modelo SI_1SI_2 , por lo que no hay coexistencia. Como se puede observar en la figura 3.19 y en un análisis un poco más exhaustivo para varios valores del plano (τ_1, τ_2) en B.2, la fase de coexistencia (enmarcada en rojo en 3.19) crece a medida que α se va haciendo cada vez más positivo. Para valores α bajos, la coexistencia aparece en una región pequeña alrededor de la recta $\tau_2 = \tau_1$, y en tanto que α se va haciendo más grande, la región de coexistencia aumenta de tamaño, desplazando a las fases de dominio de $N1$ y $N2$ a valores cada vez más altos de τ_1 y τ_2 respectivamente.

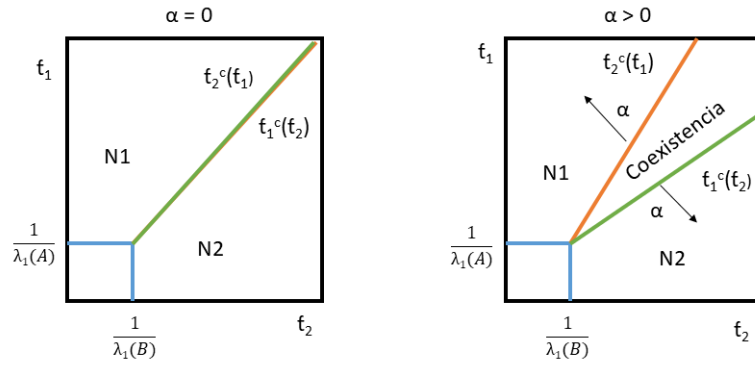


Figura 3.20: Resumen resultados modelo $SI_1(S)I_2S$

Grafos de dos capas

El objetivo de esta sección es intentar deducir cuál es el comportamiento del modelo para distintos valores de α en grafos de dos capas. Para ello, vamos a fijar un grafo de 100 nodos y realizar varias simulaciones del modelo para distintos valores de τ_2 . De esta forma, podremos hacernos una idea aproximada de cómo se comporta el modelo en función de α en el plano (τ_1, τ_2) .

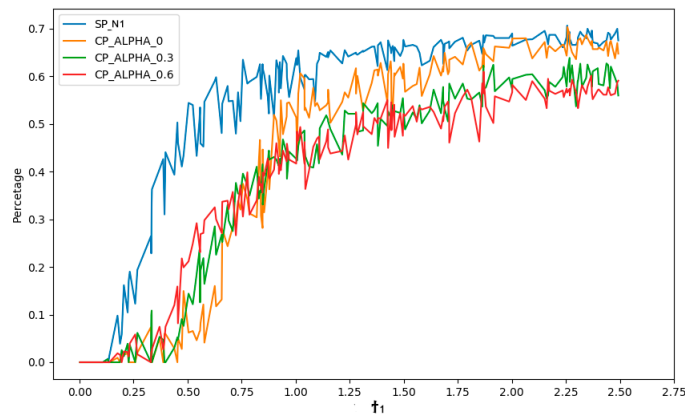


Figura 3.21: Modelo $SI_1(S)I_2S$ en un grafo de dos capas con $N2$ fija ($\tau_2 = 0,75$)

De la figura anterior, podemos extraer las siguientes conclusiones:

- El valor de τ_1^c , visto como función de α , ya no es tan decreciente como en la figura 3.13. Esto provoca que τ_1^c tenga valores similares para los distintos α , y dé la impresión de que todas las curvas se “levantan” del cero prácticamente en el mismo valor de τ_1 . Sin embargo, si nos fijamos bien podemos ver como la curva roja ($\alpha = 0,6$) se despegas del cero antes que la verde ($\alpha = 0,3$), y esta su vez antes que la naranja.
- Las curvas para $\alpha = 0,3$ y $\alpha = 0,6$ cortan en $\tau_1 = 0,75$ (aproximadamente) a la curva del modelo SI_1SI_2S (naranja) quedándose por debajo de esta a partir de este valor de τ_1 . Esto quiere decir que el hecho de introducir la posibilidad de cambiar de opinión en ambos sentidos, para $\tau_1 > \tau_2$, provoca que la noticia $N2$ compita de forma más agresiva contra $N1$ a como lo hacía en SI_1SI_2S .

Juntando ambos puntos, se puede intuir como la región de coexistencia que aparece en el modelo SI_1SI_2S es más pequeña que para el resto de modelos donde $\alpha > 0$. Este hecho es totalmente contrario al que se tenía para las dos versiones del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ (3.13 y 3.17), donde la región de coexistencia más amplia siempre era la del modelo SI_1SI_2S .

Para tener una perspectiva mejor de cómo varía la región de coexistencia en función de α , vamos a realizar el mismo análisis del plano (τ_1, τ_2) que se utilizó para obtener el gráfico 3.6. es decir, vamos a esbozar las curvas umbrales $\tau_1^c(\tau_2)$ y $\tau_2^c(\tau_1)$ que nos determinan la región de coexistencia entre $N1$ y $N2$. El resultados son las siguientes gráficas:

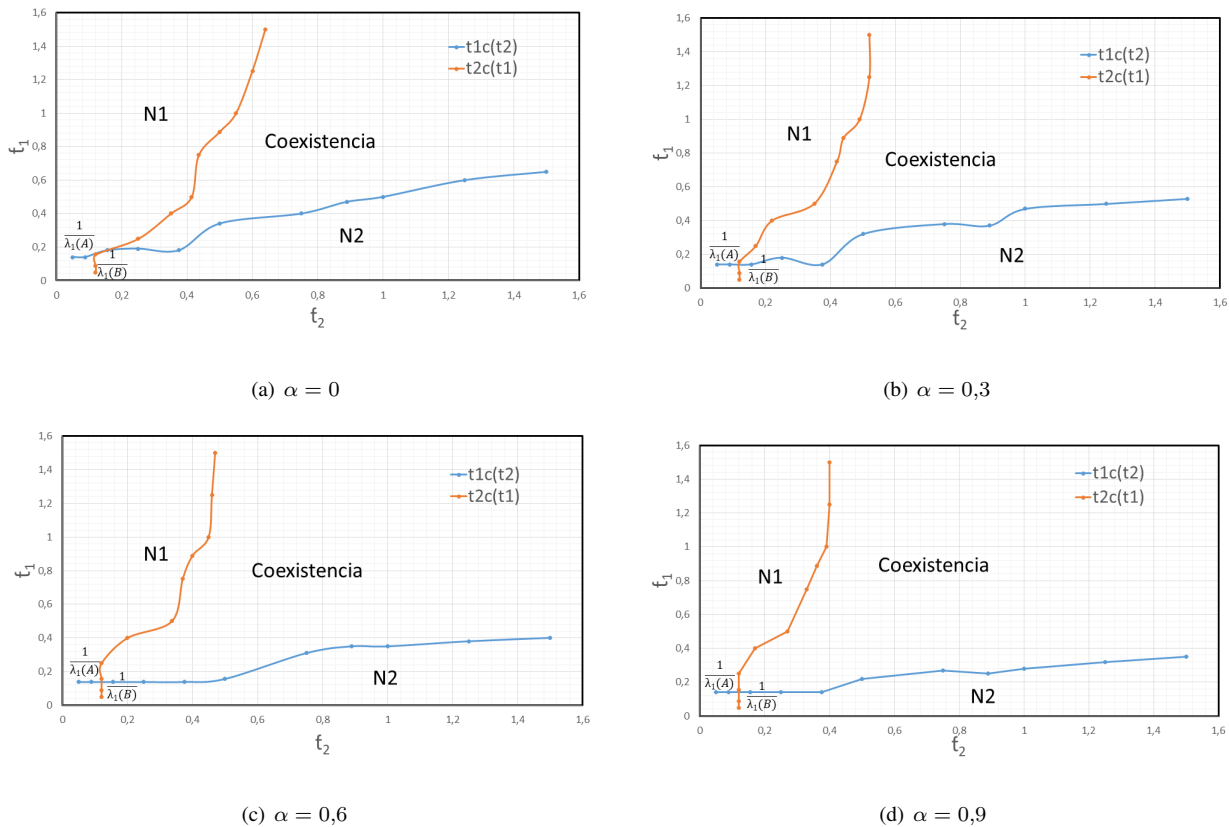


Figura 3.22: Difusión competitiva para distintos valores de α . Gráfica de umbrales.

Las cuatro gráficas de la figura anterior corroboran nuestra intuición en relación a la figura 3.21, es decir, que la región de coexistencia incrementa su tamaño a medida que α crece. El crecimiento más

llamativo se tiene para valores bajos de τ_1 y τ_2 , ya que para el modelo SI_1SI_2S , el ángulo con el que se separan ambas curvas umbrales es muy pequeño en relación al de la gráfica 3.22(d). Este aumento progresivo del ángulo a medida que crece α se debe a que la posibilidad de cambiar de opinión en ambos sentidos actúa como una especie de regulador, haciendo que ambas noticias coexisten para muchos más pares de valores de (τ_1, τ_2) . De nuevo, si permitimos que $\alpha > 1$, a lo que parece que tienden los gráficos cuando α se va haciendo cada vez más grande es a un plano (τ_1, τ_2) donde las curvas umbrales se corresponden con las rectas $\tau_1^c(\tau_2) = 1/\lambda_1(B)$ y $\tau_2^c(\tau_1) = 1/\lambda_1(A)$, es decir, donde la coexistencia es máxima.

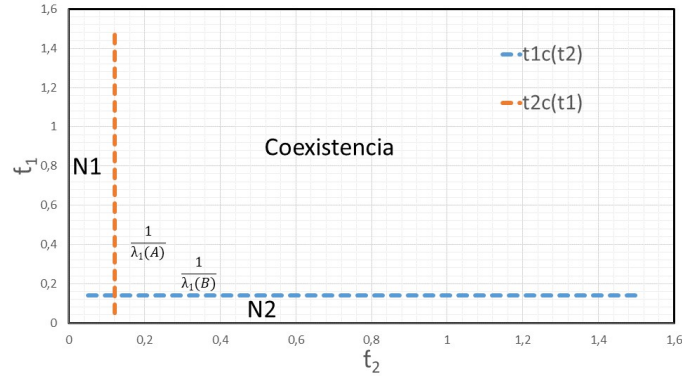


Figura 3.23: Gráfico límite

CONCLUSIONES

En este trabajo se han analizado distintos modelos basados en el modelo de propagación de virus SIS con el objetivo de describir las interacciones de dos noticias en competencia en redes sociales implementadas como grafos multicapa usando el modelo de Leskovec [1].

En primer lugar, se examinó el modelo SI_1SI_2S . Con las evidencias mostradas en 2.4.2 y 3.3 se probó para este modelo la imposibilidad de que dos noticias en competencia coexistan en un grafo de una capa o lo que es lo mismo en la misma red social. Sin embargo, si que se observó la aparición de una región en la cual ambas noticias son capaces de coexistir para grafos de dos capas a través del estudio del *umbral de supervivencia* y del *umbral de dominancia* en 2.12.

A continuación, se extendió el modelo SI_1SI_2S para permitir a los nodos la posibilidad de cambiar de opinión. La introducción de esta nueva hipótesis en los modelos $SI_1SI_2(I_1)S$ y $SI_1(S)I_2S$ provocó, en contraposición con el modelo SI_1SI_2S , la aparición de una región de coexistencia para dos noticias que se propagan en la misma capa de un grafo. Como se mostró en las evidencias 3.11 y 3.20, la principal diferencia entre las regiones de coexistencia de estos modelos es que la del modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ parece crecer con α hasta alcanzar un máximo para luego decrecer hasta su desaparición, mientras que la del modelo $SI_1(S)I_2S$ es siempre creciente respecto a este parámetro.

Por otro lado, observamos como la coexistencia que se manifestaba en grafos de dos capas para SI_1SI_2S se mantenía para estos nuevos modelos. Sin embargo, como se vio en 3.14 y 3.22 el tamaño de esta región de coexistencia varía con α de forma muy diferente. El modelo $SI_1SI_2(I_1)S$ proporciona fases de coexistencia decrecientes respecto de α y menores que SI_1SI_2S , mientras que la región de $SI_1(S)I_2S$ crece con este parámetro dando lugar a coexistencias mayores que SI_1SI_2S .

Como posibles líneas de trabajo futuro, se propone generalizar el trabajo, desde el punto de vista de la modelización y el análisis, hacia el estudio de la propagación competitiva de n noticias en un grafo con n capas distintas. Obviamente, desde el punto de vista matemático es muy complicado, por lo que es recomendable empezar haciendo un análisis de cómo cambian los resultados de estos modelos si compiten un número cada vez más alto de noticias.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Leskovec, L. Backstrom, R. Kumar, and A. Tomkins, "Microscopic evolution of social networks," in *Proceedings of the 14th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, pp. 462–470, 2008.
- [2] F. D. Sahneh and C. Scoglio, "Competitive epidemic spreading over arbitrary multilayer networks," *Physical Review E*, vol. 89, no. 6, p. 062817, 2014.
- [3] B. D. Horne and S. Adali, "This just in: fake news packs a lot in title, uses simpler, repetitive content in text body, more similar to satire than real news," in *Eleventh International AAAI Conference on Web and Social Media*, 2017.
- [4] R. Albert and A.-L. Barabási, "Statistical mechanics of complex networks," *Reviews of modern physics*, vol. 74, no. 1, p. 47, 2002.
- [5] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, "Contributions to the mathematical theory of epidemics—i," *Bulletin of mathematical biology*, vol. 53, no. 1-2, pp. 33–55, 1991.
- [6] N. Boccara and K. Cheong, "Critical behaviour of a probabilistic automata network sis model for the spread of an infectious disease in a population of moving individuals," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 26, no. 15, p. 3707, 1993.
- [7] M. Tambuscio, G. Ruffo, A. Flammini, and F. Menczer, "Fact-checking effect on viral hoaxes: A model of misinformation spread in social networks," in *Proceedings of the 24th international conference on World Wide Web*, pp. 977–982, 2015.

APÉNDICES

APÉNDICE A

A.1. Teorema de Perron-Frobenius

Teorema A.1.1. (Perron–Frobenius) Sea $A = (a_{i,j})_{n \times n}$ una matriz cuadrada tal que $a_{i,j} > 0$ para $1 \leq i, j \leq n$. Entonces A cumple:

- Existe un autovalor real positivo r tal que para cualquier otro autovalor de λ de A se tiene que $r > |\lambda|$. Por tanto, $\lambda_1(A) = r$.
- El autovector $v = (v_1, \dots, v_n)$ asociado al autovalor r es positivo, es decir, $v_i > 0$ para $1 \leq i \leq n$.
- No hay otros autovectores positivos. El resto deben contener al menos una coordenada negativa o no real.

A.2. Condición de no propagación

Demostración. 2.4.1

Supongamos que la noticia $N1$ se propaga sin competencia por un grafo de una sola capa. Esto equivale a suponer en la ecuación 2.5 que $p_{2,i} = 0$ para todo $i = 1, \dots, N$. Por tanto,

$$\frac{\dot{p}_{1,i}}{\delta_1} = \tau_1(1 - p_{1,i}) \sum a_{i,j} p_{1,j} - p_{1,i} \quad (\text{A.1})$$

Un recurso muy utilizado en el análisis de las ecuaciones diferenciales es la linealización, ya que permite simplificar los cálculos y las soluciones del sistema linealizado son muy parecidas a las del sistema sin linealizar cerca del punto $p_{1,i} = p_{2,i} = 0$. Linealizando la ecuación anterior,

$$\frac{\dot{p}_{1,i}}{\delta_1} = \tau_1 \sum a_{i,j} p_{1,j} - p_{1,i} \quad (\text{A.2})$$

Si definimos $P = (p_{1,1}, \dots, p_{1,N})$, la ecuación se puede escribir como:

$$\frac{1}{\delta_1} \dot{P} = [\tau_1 A - I]P \implies \frac{\dot{P}}{P} = [\tau_1 A - I] \quad (\text{A.3})$$

Resolviendo la ecuación se tiene

$$P = \exp([\tau_1 A - I]t) \quad (\text{A.4})$$

Esta solución es estable si la parte real de los autovalores de $[\tau_1 A - I]$ son negativos. Como esta matriz es simétrica, todos sus autovalores son reales, lo que equivale a que todos sean negativos. Basta ver que $\lambda_1(\tau_1 A - I) < 0$. Para ello veamos que relación existe entre los autovalores de A y los de esta matriz. Supongamos que α es un autovalor de A y \vec{v} su autovector correspondiente. Entonces:

$$[\tau_1 A - I]\vec{v} = \tau_1 A\vec{v} - \vec{v} = \tau_1 \alpha \vec{v} - \vec{v} = (\tau_1 \alpha - 1)\vec{v} \quad (\text{A.5})$$

Por tanto, se comprueba fácilmente que $\lambda_1(\tau_1 A - I) = \tau_1 \lambda_1(A) - 1$. De esta igualdad se sigue:

$$\lambda_1(\tau_1[A - I]) = \tau_1 \lambda_1(A) - 1 < 0 \iff \tau_1 < \frac{1}{\lambda_1(A)}. \quad (\text{A.6})$$

□

A.3. Cálculo de derivada

Derivamos la primera ecuación de 2.6 respecto de τ_1 .

$$\frac{(1 - p_{1,i}^* - p_{2,i}^*) \frac{dp_{1,i}^*}{d\tau_1} + p_{1,i}^* \frac{dp_{2,i}^*}{d\tau_1} + p_{1,i}^* \frac{dp_{1,i}^*}{d\tau_1}}{(1 - p_{1,i}^* - p_{2,i}^*)^2} = \tau_1 \sum a_{i,j} \frac{dp_{1,j}^*}{d\tau_1} + \sum a_{i,j} p_{1,j}^* \quad (\text{A.7})$$

Si nos situamos en $p_{1,i}^* = 0$ y $p_{2,i}^* = y_i$ se tiene que

$$\frac{(1 - y_i) \frac{dp_{1,i}^*}{d\tau_1} |_{\tau_1 = \tau_1^c}}{(1 - y_i)^2} = \tau_1^c \sum a_{i,j} \frac{dp_{1,j}^*}{d\tau_1} |_{\tau_1 = \tau_1^c} \quad (\text{A.8})$$

Por tanto,

$$\frac{dp_{1,i}^*}{d\tau_1} |_{\tau_1 = \tau_1^c} = \tau_1^c (1 - y_i) \sum a_{i,j} \frac{dp_{1,j}^*}{d\tau_1} |_{\tau_1 = \tau_1^c} \quad (\text{A.9})$$

A.4. Inestabilidad de las soluciones I, II y III

El hecho de que I sea inestable, es gratis por el lema 2,4,1. Para ver que II y III son inestables se necesita algo más de trabajo. Veamos que $p_{1,i}^* = 0$ y $p_{2,i}^* = y_i > 0$ no es estable bajo estas

condiciones. El procedimiento para ver que III es inestable es totalmente análogo.

Linealizamos la primera ecuación del sistema 2.5 cerca del punto $(0, y_i)$, ya que cerca de este punto de equilibrio las soluciones del sistema linealizado se acercarán mucho a las de sistema original. La primera ecuación del sistema linealizado es

$$\dot{p}_{1,i} = \tau_1(1 - y_i) \sum a_{i,j} p_{1,j} - p_{1,i} \quad (\text{A.10})$$

Si definimos $P = (p_{1,1}, \dots, p_{1,N})$ podemos reescribir la ecuación de la siguiente forma:

$$\dot{P} = [\tau_1 \text{diag}(1 - y_i)A - I]P \quad (\text{A.11})$$

Para que II sea estable es necesario que todos los autovalores de la matriz $\tau_1 \text{diag}(1 - y_i)A - I$ sean negativos. Sin embargo,

$$\lambda_1(\tau_1 \text{diag}(1 - y_i)A - I) > \lambda_1(\tau_1^c \text{diag}(1 - y_i)A - I) = 0 \quad (\text{A.12})$$

Por tanto, la solución II es inestable en estas condiciones.

A.5. Umbral de supervivencia en grafos de una capa

Si hacemos que $p_{1,i}^* = 0$ y $p_{2,i}^* = y_i$ en 2.6, obtenemos:

$$y_i = \tau_2(1 - y_i) \sum a_{i,j} y_j. \quad (\text{A.13})$$

Si definimos $v = (y_1, \dots, y_N)$ la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{1}{\tau_2}v = \text{diag}(1 - y_i)Av \quad (\text{A.14})$$

De esta condición más el teorema de Perron-Frobenius, se deduce que $\lambda_1(\text{diag}(1 - y_i)A) = \frac{1}{\tau_2}$. Por tanto, por la ecuación 2.12, se tiene que

$$\tau_1^c = \frac{1}{\lambda_1(\text{diag}(1 - y_i)A)} = \tau_2 \quad (\text{A.15})$$

APÉNDICE B

B.1. Generación de un grafo multicapa. Modelo de Leskovek

B.1.1. Creación de un nodo

Código B.1: Creación del nodo y de su primer enlace por adhesión preferencial.

```

1  # Prepare the target for the first edge
2  tgt_layer1 = pick_target(G, nlst.get_number(),1) #last argument is the layer
3  if numlayers == 2:
4      tgt_layer2 = pick_target(G, nlst.get_number(),2) #last argument is the layer
5
6  # Create the node and the first edge
7  try:
8      id = G.add_node(nlst, [tgt_layer1], [tgt_layer2])
9  except UnboundLocalError:
10     id = G.add_node(nlst, [tgt_layer1], [])

```

Código B.2: Programación del siguiente enlace.

```

1  # Schedule the next edge addition; if above the life time,
2  # set this ndoe as inactive
3  r = pwexpnd.pwexp(1, pwexpstat)
4
5  if r>span:
6      nlst.set_network_status(INACTIVE)
7  else:
8      layers = num.rnd_layers(numlayers)
9      f = lambda gg, ll, tt: edge_create(gg, ll, tt, id, layers, numlayers)
10     tsk = Task(time+r, id, CREATEEDGE, f)
11     tlist = task_insert(tlist, tsk)

```

Código B.3: Programación de la creación del siguiente nodo.

```

1  if N < NMax:
2      tnew = math.sqrt(float(N+1)/K)
3      f = lambda gg, ll, tt : node_create(gg, ll, tt, lave, K, NMax, numlayers)
4      tsk = Task(tnew, id, CREATENODE, f)
5      tlist = task_insert(tlist, tsk)
6
7  return [G, tlist]

```

B.1.2. Creación de un enlace

Código B.4: Creación de un enlace en cada capa entre el nodo sobre el que se está ejecutando la tarea y otro nodo del grafo. Este nodo puede ser elegido para cerrar un triángulo con probabilidad p o por adhesión preferencial con probabilidad $(1 - p)$.

```

1  for layer in layers:
2      n1 = num.rnd_scramble(G.get_neighbours(n)[layer-1])
3      d = len(n1)
4      added = [False, False]
5      # Add the edge trying to close a triangle, with probability TriangleP
6      r = random.uniform(0,1)
7      if r < TriangleP:
8          for v in n1:
9              n2 = num.rnd_scramble(G.get_neighbours(v)[layer-1])
10             rch = [x for x in n2 if (not (x in n1) and not (x == n))]
11             if rch != []:
12                 tgt = rch[0]
13                 j = 0
14                 while tgt == n:
15                     tgt = rch[j]
16                     j = j + 1
17                 G.add_edge(n, tgt, layer)
18                 added[layer-1] = True
19             break
20     # if it was not possible, or if the draw has dictated so, pick an
21     # edge using preferential attachment
22     if not added[layer-1]:
23         tgt = pick_no_double(G, n, layer)
24         G.add_edge(n, tgt, layer)

```

Código B.5: Programación del siguiente enlace.

```

1  if tm+r > node.get_death():
2      node.set_network_status(INACTIVE)
3  else:
4      layers = num.rnd_layers(numlayers)
5      f = lambda gg, ll, tt: edge_create(gg, ll, tt, n, layers, numlayers)
6      tsk = Task(tm+r, id, CREATEEDGE, f)
7      tlist = task_insert(tlist, tsk)

```

B.2. Pruebas del modelo $SI_1(S)I_2S$ para grafos de una capa

t2 / t1	0,022			0,1556			0,22			0,556			0,667			1			1,33			1,556		
	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2
0,05	0	1	0	0	1	0	0,487	0,513	0	0,698	0,342	0	0,621	0,379	0	0,681	0,319	0	0,69	0,31	0	0,708	0,292	0
0,313	0	0,418	0,582	0	0,432	0,568	0,489	0,514	0	0,462	0,538	0,164	0,459	0,541	0,159	0,498	0,502	0,196	0,699	0,341	0	0,677	0,323	0
0,5	0	0,4	0,6	0	0,349	0,651	0,52	0,396	0,552	0,33	0,371	0,3	0,389	0,611	0,257	0,45	0,552	0,196	0,478	0,522	0,179	0,487	0,513	0,211
0,95	0	0,313	0,687	0	0,311	0,689	0	0,311	0,689	0,231	0,327	0,442	0,229	0,341	0,43	0,367	0,307	0,326	0,315	0,34	0,345	0,404	0,33	0,266
1,375	0	0,312	0,688	0	0,287	0,713	0	0,316	0,684	0,201	0,302	0,497	0,252	0,339	0,409	0,324	0,309	0,367	0,369	0,29	0,341	0,326	0,303	0,371
1,875	0	0,306	0,694	0	0,296	0,704	0	0,298	0,702	0,21	0,295	0,495	0,205	0,285	0,51	0,272	0,304	0,424	0,266	0,319	0,415	0,3	0,298	0,402
2	0	0,302	0,698	0	0,289	0,711	0	0,276	0,724	0,205	0,307	0,488	0,188	0,33	0,482	0,264	0,306	0,43	0,24	0,311	0,449	0,278	0,295	0,427

 Dominio de N_1
 Coexistencia
 Dominio de N_2
 Extinción

☐ N1: Porcentaje de nodos en Q_{N1}
☐ N2: Porcentaje de nodos en Q_{N2}

(a) $\alpha = 0,25$

t2 / t1	0,022			0,1556			0,22			0,556			0,667			1			1,33			1,556		
	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2
0,05	0	1	0	0,418	0,582	0	0,483	0,517	0	0,651	0,349	0	0,636	0,364	0	0,649	0,351	0	0,642	0,358	0	0,715	0,285	0
0,3125	0	0,439	0,561	0	0,439	0,561	0	0,465	0,535	0,496	0,407	0,157	0,496	0,504	0,116	0,546	0,454	0,092	0,544	0,456	0,093	0,573	0,427	0,106
0,5	0	0,369	0,631	0	0,336	0,664	0	0,356	0,644	0,33	0,389	0,294	0,417	0,583	0,255	0,449	0,551	0,202	0,445	0,555	0,228	0,419	0,581	0,257
0,95	0	0,302	0,698	0	0,308	0,692	0	0,307	0,693	0,261	0,334	0,405	0,236	0,338	0,406	0,35	0,321	0,329	0,337	0,305	0,337	0,337	0,336	0,317
1,375	0	0,318	0,682	0	0,292	0,708	0	0,293	0,707	0,241	0,337	0,442	0,214	0,332	0,454	0,29	0,32	0,39	0,3	0,344	0,356	0,316	0,317	0,367
1,875	0	0,309	0,691	0	0,304	0,696	0	0,277	0,723	0,208	0,33	0,439	0,2	0,315	0,487	0,236	0,325	0,439	0,258	0,304	0,438	0,298	0,321	0,381
2	0	0,323	0,677	0	0,309	0,691	0	0,294	0,706	0,209	0,312	0,479	0,201	0,304	0,495	0,267	0,307	0,426	0,246	0,338	0,421	0,278	0,332	0,4

 Dominio de N_1
 Coexistencia
 Dominio de N_2
 Extinción

☐ N1: Porcentaje de nodos en Q_{N1}
☐ N2: Porcentaje de nodos en Q_{N2}

(b) $\alpha = 0,25$

t2 / t1	0,022			0,1556			0,22			0,556			0,667			1			1,33			1,556		
	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2	N1	N	N2
0,05	0	1	0	0,413	0,587	0	0,481	0,519	0	0,632	0,368	0	0,647	0,353	0	0,684	0,316	0	0,66	0,34	0	0,664	0,336	0
0,3125	0	0,453	0,547	0	0,451	0,549	0,082	0,469	0,449	0,442	0,392	0,148	0,526	0,474	0,116	0,581	0,419	0,092	0,671	0,329	0	0,668	0,332	0
0,5	0	0,354	0,646	0	0,357	0,643	0	0,367	0,633	0,304	0,39	0,306	0,374	0,38	0,246	0,418	0,582	0,213	0,428	0,572	0,23	0,449	0,551	0,23
0,95	0	0,314	0,686	0	0,302	0,698	0	0,295	0,705	0,236	0,335	0,364	0,292	0,341	0,367	0,316	0,338	0,346	0,35	0,302	0,348	0,38	0,311	0,339
1,375	0	0,276	0,724	0	0,296	0,704	0	0,311	0,689	0,199	0,304	0,519	0,24	0,313	0,447	0,3	0,334	0,376	0,329	0,303	0,368	0,31	0,339	0,371
1,875	0	0,287	0,713	0	0,292	0,708	0	0,271	0,729	0,18	0,319	0,501	0,216	0,323	0,461	0,29	0,339	0,399	0,295	0,314	0,391	0,306	0,318	0,378
2	0	0,296	0,694	0	0,288	0,712	0	0,311	0,689	0,175	0,309	0,524	0,235	0,323	0,457	0,23	0,311	0,454	0,288	0,331	0,381	0,293	0,306	0,402

 Dominio de N_1
 Coexistencia
 Dominio de N_2
 Extinción

☐ N1: Porcentaje de nodos en Q_{N1}
☐ N2: Porcentaje de nodos en Q_{N2}

(c) $\alpha = 0,5$ Figura B.1: Simulaciones del modelo $SI_1(S)I_2S$ en un grafo de 1000 nodos de una sola capa para distintos valores de α

